

U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística

26 de junho de 2013

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O exame é composto por 5 grupos de questões, contém 2 páginas e termina com a palavra **FIM** e por um formulário de 2 páginas que termina com as palavras **FIM DO FORMULÁRIO**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- É permitido o uso de máquina de calcular e do formulário que acompanha este exame.
- **O exame tem a duração de 2 horas mais 30 minutos de tolerância.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos cinco grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2	3	4	5
Cotação	6.5	3	4.5	1.5	4.5

1. Considere os dados seguintes relativos ao número de intervenções cirúrgicas realizadas diariamente num bloco operatório de um hospital durante o período de 200 dias:

Quadro I

Nº de intervenções	n_i	N_i	f_i
0	40		
1		90	
2			0.30
3			
4	20		

(n_i frequência absoluta; N_i frequência absoluta acumulada; f_i frequência relativa)

- 1.1. Complete o Quadro I utilizando a informação indicada. Justifique detalhadamente todos os raciocínios e cálculos que efectuar.
- 1.2. Qual o número de dias em que o bloco foi utilizado para uma, duas, ou três intervenções cirúrgicas? Justifique.
- 1.3. Em relação ao período de tempo em análise, qual a percentagem de dias em que o máximo de intervenções realizadas no bloco foi uma? Justifique.
- 1.4. Determine, justificando, a média, a moda e a mediana do número de intervenções cirúrgicas realizadas diariamente.
2. Dado um baralho usual de 52 cartas, considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultanea e aleatoriamente, um conjunto de 13 cartas.
- 2.1. De quantas maneiras diferentes é que se pode retirar um conjunto de 13 cartas das quais 4 são do mesmo valor facial (incluindo figuras e cartas numeradas)? Justifique.
- 2.2. Qual a probabilidade de se retirar um conjunto de 13 cartas, em que 5 são do mesmo naipe e as restantes de outros naipes, diferentes do anterior? Justifique.
3. Considere a seguinte função de distribuição de uma variável aleatória discreta X com valores em $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.5, & 1 \leq x < 2 \\ k, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

- 3.1. Sabido que $P(X > 2) = 0.3$, determine o valor de k . Justifique.
- 3.2. Calcule $P(X \leq 2.5)$ e $P(2X > 3)$.
- 3.3. Determine a função de probabilidade da variável aleatória X .
4. Seja X uma variável aleatória de Poisson de parâmetro λ . Mostre que

$$P(X = n + 1) = \frac{\lambda^n}{(n + 1)!} P(X = 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Uma máquina produz parafusos. Neste processo de fabrico verifica-se que o comprimento (em centímetros) dos parafusos é uma variável normalmente distribuída de média 5 cm e desvio padrão 0.2 cm. É considerado defeituoso todo o parafuso cujo comprimento saia do intervalo $]4.8, 5.2[$. Nesta situação, o parafuso é rejeitado.
- 5.1. Qual a percentagem de parafusos defeituosos produzidos por esta máquina? Justifique.
- 5.2. Entre os parafusos rejeitados, a maior taxa de rejeição verifica-se entre os parafusos com mais de 5.2 cm, ou entre os parafusos com menos de 4.8 cm de comprimento? Justifique.
- 5.3. Escolhida uma amostra aleatória de 10 parafusos da produção anual, qual é a probabilidade de que nenhum seja defeituoso? Justifique.

FIM

FORMULÁRIO

Modelos	Expressão das funções de Probabilidade	μ	σ^2
Bernoulli	$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$ $x=0,1$	p	$p(1-p)$
Binomial	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x=0,1,..n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x=0,1,...$	λ	λ
Uniforme	$P(X = x) = \frac{1}{n}$ $x=0,1,...$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Geométrica	$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}; x=1,...$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

		Expressão das funções de:		μ	σ^2
Modelos	Densidade	Distribuição			
Exponencial	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad x > 0$	$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \quad x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, b]$	$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad x \in [a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		μ	σ^2	

Valores da Função Distribuição Normal Reduzida

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(Z \leq z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018
-1,9	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023
-1,8	0,036	0,035	0,034	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029
-1,7	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
-1,6	0,055	0,054	0,053	0,052	0,051	0,049	0,048	0,047	0,046	0,046
-1,5	0,067	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,058	0,057	0,056
-1,4	0,081	0,079	0,078	0,076	0,075	0,074	0,072	0,071	0,069	0,068
-1,3	0,097	0,095	0,093	0,092	0,090	0,089	0,087	0,085	0,084	0,082
-1,2	0,115	0,113	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,100	0,099
-1,1	0,136	0,134	0,131	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,119	0,117
-1,0	0,159	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138
-0,9	0,184	0,181	0,179	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,198	0,195	0,192	0,189	0,187
-0,7	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,215
-0,6	0,274	0,271	0,268	0,264	0,261	0,258	0,255	0,251	0,248	0,245
-0,5	0,309	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278
-0,4	0,345	0,341	0,337	0,334	0,330	0,326	0,323	0,319	0,316	0,312
-0,3	0,382	0,378	0,374	0,371	0,367	0,363	0,359	0,356	0,352	0,348
-0,2	0,421	0,417	0,413	0,409	0,405	0,401	0,397	0,394	0,390	0,386
-0,1	0,460	0,456	0,452	0,448	0,444	0,440	0,436	0,433	0,429	0,425
-0,0	0,500	0,496	0,492	0,488	0,484	0,480	0,476	0,472	0,468	0,464
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982

Fim do formulário