

U.C. 21076
Investigação Operacional
p-fólio modelo resolvido

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- No caso de provas com escolha múltipla, **sem grelha de resposta**, deverá indicar a resposta correcta na folha de ponto, indicando o número da pergunta e a resposta que considera correcta.
- No caso de provas com escolha múltipla, **com grelha de resposta, tabela e/ou espaços para preenchimento**, deverá efectuar as respostas no enunciado, pelo que o mesmo deverá ser entregue ao vigilante, juntamente com a folha de ponto, **não sendo permitido ao estudante levar o enunciado**.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 7 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- É permitido o uso de máquina de calcular.
- **Duração: 90 minutos.**
- As questões terão as cotações seguintes:

1.	2.
4.0	8.0

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

1. Um determinado recinto desportivo possui uma única bilheteira onde são vendidos bilhetes por um único funcionário. Pode considerar-se que as chegadas de espectadores constituem um processo de Poisson, com uma taxa média de chegadas de 45 clientes por hora, e estima-se que a duração de cada atendimento se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 1 minuto por servidor.

(a) Identifique o modelo para este sistema e determine as seguintes características do sistema:

- λ (taxa média de chegada);
- μ (taxa média de atendimento);
- ρ

Solução:

Sistema de fila de espera $M/M/1$ com:

- $\lambda = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ clientes por minuto;
- $\mu = \frac{1}{1} = 1$ clientes por minuto;
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$;

Cotação:

1.0 - modelo certo

1.0 - características certas.

(b) Determine o comprimento médio da fila de espera e o tempo médio de espera na fila por espectador.

Solução:

Temos $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/4}{1-3/4} = \frac{3/4}{1/4} = 3$, logo de $L = \bar{\lambda}W$ obtemos $3 = \frac{3}{4}W$ e $W = 4$. Assim:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 4 - 1 = 3 \text{ minutos.}$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ espectadores.}$$

Cotação:

2.0 - soluções certas

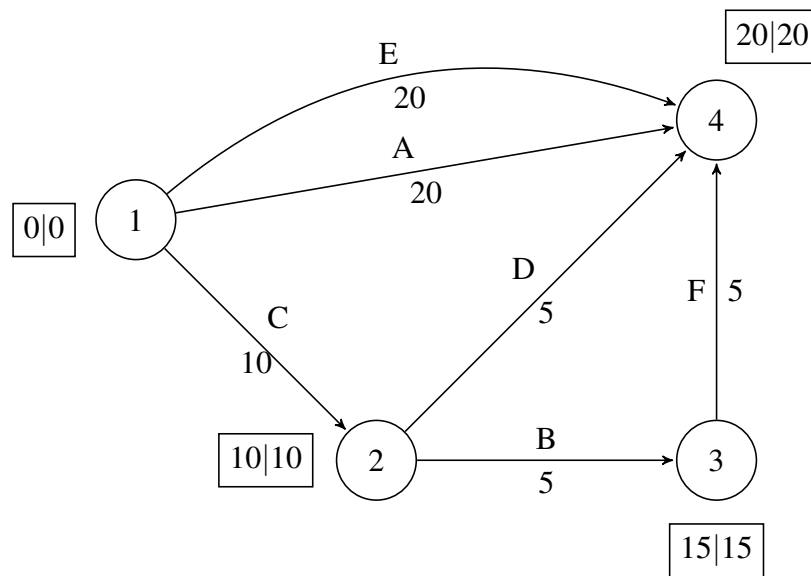
2. Considere um empreendimento caracterizado pelas seguintes atividades, precedências e durações:

Atividades	Precedências	Duração	
		μ	σ
A	-	20	3
B	C	5	1
C	-	10	2
D	C	5	1
E	-	20	3
F	B	5	1

(a) Trace a rede que representa o empreendimento.

Solução:

Temos o diagrama PERT:



Cotação:

2.0 - solução certa

(b) Determine a duração total média do empreendimento.

Solução:

$T = 20$ dias.

Cotação:

2.0 - solução certa

(c) Determine o caminho crítico médio (C.C.M.) do empreendimento.

Solução:

Temos os caminhos críticos: A ; E ; $C + B + F$.

Cotação:

2.0 - solução certa

(d) Determine, usando a técnica PERT, a probabilidade da duração do empreendimento ser inferior a 20 dias.

Solução:

Valor esperado da duração do empreendimento:

$$E(T) = \max\{E(T_A), E(T_E), E(T_C) + E(T_B) + E(T_F)\} = \max\{20, 20, 10 + 5 + 5\} = 20 \text{ dias.}$$

Variância da duração do empreendimento:

$$\sigma^2 = \max\{\sigma_A^2, \sigma_E^2, \sigma_C^2 + \sigma_B^2 + \sigma_F^2\} = \max\{9, 9, 4 + 1 + 1\} = 9.$$

Logo

$$P(T < 20) = P(T \leq 20) = P(Z \leq \frac{20-20}{3}) = \Phi(\frac{20-20}{3}) = \Phi(0) = 0.5(50%).$$

Cotação:

2.0 - solução certa

Distribuição normal padrão $\Phi(Z) = P(Z \leq z)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Formulário de Filas de Espera

Sistema $M/M/1$

$$\lambda_n = \lambda \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = \mu \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = 1 - \rho \text{ e } p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0 \text{ para } n > 0 \text{ (com } \rho < 1)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \bar{\lambda}W$$

$$W(t) = e^{-t/W} \text{ com } t \geq 0$$

$$W_q(t) = \rho e^{-t/W} \text{ com } t \geq 0$$

Sistema $M/M/s$

$$\lambda_n = \lambda \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{para } n = 0, 1, \dots, s \\ s\mu & \text{para } n > s \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$p_0 = \left\{ \frac{s^s \rho^{s+1}}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^s \frac{(s\rho)^n}{n!} \right\}^{-1} \text{ e } p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0 \text{ para } n > 0 \text{ (com } \rho < 1)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

$$L_q = \frac{s^s \rho^{s+1}}{s!(1-\rho)^2} p_0$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \bar{\lambda}W$$

$$W(t) = e^{-\mu t} \left[1 + p_0 \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \frac{(1 - e^{-\mu(s-1-sp)})}{(s-1-sp)} \right] \text{ com } t \geq 0$$

$$W_q(t) = p_0 \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} e^{-s\mu t(1-\rho)} \text{ com } t \geq 0$$

Sistema $M/M/1/K$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \quad \text{para } n = 0, 1, \dots$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \text{para } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1} & \text{para } \rho = 1 \end{cases} \quad \text{e } p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1} p_0 \quad \text{para } n > 0$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - p_K)$$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & \text{para } \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & \text{para } \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \bar{\lambda}W$$

Sistema $M/M/s/K$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & \text{para } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{para } n = 0, 1, \dots, s \\ s\mu & \text{para } n > s \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = \begin{cases} \left\{ \frac{s^s \rho^{s+1} (1-\rho^{K-s})}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^s \frac{(s\rho)^n}{n!} \right\}^{-1} & \text{para } \rho \neq 1 \\ \left\{ \frac{s^s}{s!} (K-s) + \sum_{n=0}^s \frac{s^n}{n!} \right\}^{-1} & \text{para } \rho = 1 \end{cases} \quad \text{e } p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1} p_0 \quad \text{para } n > 0$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - p_K)$$

$$L_q = \frac{s^s \rho^{s+1}}{s!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-s} - (1-\rho)(K-s)\rho^{K-s}] p_0$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \bar{\lambda}W$$
