ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve resolução do e-fólio B

I. Questões de escolha múltipla

1. d), pois o vetor nulo pertence a qualquer subespaço, e a intersecção de 2 subespaços ainda é um subespaço.
2. c), os 3 vetores são linearmente independentes, e como $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
3. c), a matriz A é uma matriz 3×3 com 3 valores próprios distintos e portanto é diagonalizável.
4. a), facilmente se vê que o núcleo é gerado pelo vetor $(0,1)$ e portanto tem dimensão 1. A dimensão da imagem é a dimensão do espaço das colunas da matriz A e portanto também é igual a 1.

II. a) A afirmação é falsa. Vejamos um exemplo simples em $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

As matrizes $A = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ são semelhantes, pois existe uma matriz $S = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ tal que $S^{-1}AS = B$.

$u = (1 \quad 0)$ é vetor próprio de A pois $Au = u$, mas $Bu = (2 \quad 1) \neq \lambda u, \forall \lambda$, e portanto u não pode ser vetor próprio de B.

b) A afirmação é falsa. Vejamos um exemplo simples em $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

A matriz $C = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ tem os vetores próprios $v = (0 \quad 1)$ e $w = (1 \quad -1)$, pois $Cv = 0\times v$ e $Cw = 1\times w$. Mas $v + w = (1 \quad 0)$ e $C(v+w) = Cv + Cw = 0\times v + 1\times w = w \neq \lambda(v+w)\forall\lambda$, e portanto $v+w$ não pode ser vetor próprio de C.

III. Embora não seja muito claro no manual, em geral o que consideramos como a base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ é a sequência $\mathscr{B}_1 = (x^2, x, 1)$.

É claro que $\mathscr{B}_2 = (1, x, x^2)$ também é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Embora este exercício tenha sido pensado para a base $\mathscr{B}_1$, é perfeitamente possível fazer o exercício todo com a base $\mathscr{B}_2$, não havendo qualquer penalização para quem usou a base $\mathscr{B}_2$. As contas com a base $\mathscr{B}_2$ envolviam valores próprios complexos.

Usando a base $\mathscr{B}_1 = (x^2, x, 1)$, tem-se

$$T(x^2) = (1,0,-1), \quad T(x) = (-1,-1,1) \quad \text{e} \quad T(1) = (0,1,0).$$

A matriz B que representa T nas bases indicadas, é a matriz que tem por *colunas* as imagens dos vetores da base do espaço de partida, ou seja $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para estudarmos o espaço das colunas de B é conveniente condensar a matriz transposta de B,

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_2+\ell_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3+\ell_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e portanto a matriz tem dois pivots. Concluimos que as 2 primeiras colunas de B formam uma base do espaço das colunas de B.

Nota: Não fazia sentido fazer operações sobre as *linhas* da matriz B para tirar conclusões sobre as *colunas* da matriz B.

Para o espaço das linhas de B procedemos da mesma forma usando a matriz B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3+\ell_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e portanto a matriz tem dois pivots. Concluimos que as 2 primeiras linhas de B formam uma base do espaço das linhas de B.

O espaço imagem de T corresponde ao espaço das colunas de B, e portanto o espaço imagem de T é gerado por ((1,0,−1) e $(-1,-1,1)$. A base do espaço imagem de T é $((1,0,-1),(-1,-1,1))$.

O núcleo de T corresponde aos polinómios de $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tais $T(p) = 0$. Usando a matriz B, isso corresponde a resolver o sistema $BX = 0$, ou seja

$$BX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \implies x = y = z.$$

este subespaço é gerado por qualquer vetor $\alpha(1,1,1), \forall \alpha \neq 0$, e escolhendo $\alpha = 1$, obtemos o vetor $(1,1,1)$, que corresponde ao polinómio x^2+x+1. O núcleo de T é o subespaço gerado pelo polinómio x^2+x+1.

Os valores próprios de B são as soluções de $\det(B-\lambda I_3)=0$, ou seja da equação

$$\det(B-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda)-1)-(-1),$$

usando a primeira coluna para calcular o determinante.Tem-se

$$\begin{aligned}(1-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda)-1)-(-1)&=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-1)+1\\ &=\lambda^2+\lambda-1-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1\\ &=-\lambda^3+2\lambda\\ &=-\lambda(\lambda^2-2)\\ &=-\lambda(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}),\end{aligned}$$

e portanto os valores próprios de B são $\lambda_1=0, \lambda_2=\sqrt{2}$ e $\lambda_3=-\sqrt{2}$. Uma vez que as raízes são todas simples, a multiplicidade algébrica dos valores próprios é igual a 1. Como estamos em $\mathbb{R}^3$, a soma das multiplicidades geométricas é igual a 3, e como temos 3 valores próprios distintos com multiplicidade geométrica pelo menos igual a 1, isso significa que a multiplicidade geométrica de cada valor próprio é mesmo igual a 1.

O vetor próprio v_1 associado a λ_1 é uma solução não nula de $(B-\lambda_1 I_3)v_1=0$, ou seja uma solução não nula de $Bv_1=0$. Uma vez que já calculámos o núcleo, uma solução é $v_1=(1,1,1)$.

O vetor próprio v_2 associado a λ_2 é uma solução não nula de $(B-\lambda_2 I_3)v_2=0$, ou seja uma solução não nula de $(B-\sqrt{2}I_3)v_2=0$, o que corresponde ao sistema

$$(B-\sqrt{2}I_3)v_2=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & -1 & 0\\ 0 & -1-\sqrt{2} & 1\\ -1 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}v_2=0 \Longrightarrow \begin{cases}(1-\sqrt{2})x-y=0\\ (-1-\sqrt{2})y+z=0\\ -x+y-\sqrt{2}z=0.\end{cases}$$

Escolhendo $x=1$ na primeira equação vem $y=1-\sqrt{2}$ e substituindo na segunda equação obtemos $z=-1$, ou seja $v_2=(1,1-\sqrt{2},-1)\neq 0$, e portanto é um vetor próprio.

O vetor próprio v_3 associado a λ_3 é uma solução não nula de $(B-\lambda_3 I_3)v_3=0$, ou seja uma solução não nula de $(B+\sqrt{2}I_3)v_3=0$, o que corresponde ao sistema

$$(B+\sqrt{2}I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} v_3 = 0 \implies \begin{cases} (1+\sqrt{2})x - y = 0 \\ (-1+\sqrt{2})y + z = 0 \\ -x + y + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

Escolhendo $x = 1$ na primeira equação vem $y = 1+\sqrt{2}$ e substituindo na segunda equação obtemos $z = 1$, ou seja $v_3 = (1, 1+\sqrt{2}, 1) \neq 0$, e portanto é um vetor próprio.

Nota: Por definição um vetor próprio é *sempre* diferente do vetor nulo!

Uma vez que temos uma matriz 3×3 com 3 valores próprios distintos, a matriz B é diagonalizável.

A matriz que diagonaliza B é a matriz que tem por colunas os vetores próprios, ou seja

$$S = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz diagonal semelhante a B é a matriz com os valores próprios na diagonal, com a mesma ordem que anteriormente, ou seja

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

IV. a) Temos sequências com 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ portanto considerando a matriz com colunas (ou linhas) formadas pelas componentes dos vetores de $\mathscr{B}_1$ e de $\mathscr{B}_2$ basta ver que essas matrizes têm característica igual a 3.

No caso de $\mathscr{B}_1$ (o caso de $\mathscr{B}_2$ é semelhante) tem-se

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_2-\ell_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3-\ell_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto a matriz tem característica 3, e os 3 vetores da sequência $\mathscr{B}_1$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

IV. b)

Por definição a matriz $\mathscr{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ é a matriz cujas colunas são constituídas pelas componentes dos vetores da base $\mathscr{B}_1$ na base $\mathscr{B}_2$, ou seja

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_{21}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_{31}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha_{12}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_{22}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_{13}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_{23}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_{33}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Em forma matricial

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}}_{\mathscr{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)},$$

ou seja

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) &= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\-1/2 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1\\-1/2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

IV. c) As coordenadas de u na base $\mathscr{B}_2$ são obtidas usando a matriz calculada na alínea anterior,

$$\mathscr{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)u = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1\\-1/2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\0\end{pmatrix}.$$

FIM