UNIVERSIDADE
AbERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

p-Fólio

U.C. 21073

Introdução à probabilidade e estatística Bayesianas

1 de Fevereiro de 2016

- INSTRUÇÕES -

- O p-fólio é composto por 5 questões (de onde serão escolhidas 3), contém 2 páginas e termina com a palavra **FIM**. Contém ainda uma página de formulário, em anexo.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. Não serão classificadas respostas apresentada em folhas de rascunho.Após a prova, o enunciado pode ficar na posse do estudante.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- É permitido o uso de máquina de calcular.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **90 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação:

- É importante ter presente que só serão cotadas as questões devidamente justificadas. Se apresentar apenas um valor numérico como resposta sem qualquer justificação, mesmo que esteja correcto, terá cotação zero. Acautele a justeza dos conteúdos da resposta ao enunciado da questão.
- A apresentação de definições e resultados teóricos, desde que sejam relevantes para a resposta, serão alvo de classificação.
- As questões terão as cotações seguintes: cada questão vale 4 valores.

Por favor preencha os seus dados

Nome:

Nº de Estudante

B.I.:

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

Grupo I

Responda a uma (e apenas uma) das seguintes duas questões, à sua escolha.

Problema 1. *Diga, justificando, se o seguinte conjunto de atribuições de probabilidades é internamente consistente:*

$$p(A \Rightarrow B|C) = 0.6$$
$$p(A|C) = 0.5$$
$$p(AB|C) = 0.2$$

Problema 2. *Um concurso de televisão consiste no seguinte: São apresentadas três portas fechadas ao concorrente, que tem que escolher uma. Por detrás de uma, e apenas uma, encontra-se o prémio. Suponhamos que o concorrente escolheu a porta número 3. Após essa escolha, e antes da porta ser aberta, o apresentador (que sabe onde está o prémio), abre a porta número 1 e mostra ao concorrente que o prémio não estava lá. Restam portanto apenas a porta 3, que o concorrente escolheu, e a porta 2. O apresentador diz ao concorrente que, se quiser, ele ainda pode mudar a sua escolha da porta 3 para a porta 2. Pergunta: Será que vale a pena mudar de escolha? Quais são as probabilidades so prémio estar atrás de cada uma das portas, antes e depois do apresentador ter aberto a porta 1?*

Grupo II

Responda a duas (e apenas duas) das seguintes três questões, à sua escolha.

Problema 3. *Considere o seguinte modelo de Pareto, em que $x_m > 0$ é uma constante real conhecida e $\lambda > 0$ é um parâmetro real desconhecido:*

$$p(x|\lambda, x_m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda x_m^\lambda}{x^{\lambda+1}}, & para\ x \geq x_m \\ 0, & para\ x < x_m \end{cases}$$

Mostre que a família $Gama(\alpha, \beta)$ é família conjugada de priors para o modelo de Pareto com x_m conhecido, e calcule a regra de actualização dos parâmetros α, β.

Nota: Recorde que

$$Gama(\lambda|\alpha, \beta) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}.$$

Problema 4. *O número de novos autores que em cada ano fiscal conseguem fazer um contrato com uma certa editora é uma variável aleatória que segue uma distribuição Poisson de média θ cuja distribuição a priori é uma $Gamma(\alpha = 15, \beta = 5)$. Sabendo-se que nos últimos 10 anos a editora contratou um total de 44 novos autores determine:*

a) A distribuição a posteriori de θ.

b) A estimação de máxima verosimilhança de θ.

c) O valor de θ para o qual é atingido o máximo da distribuição à posteriori, e o valor médio a posteriori de θ.

Problema 5. *Um sensor óptico mede a distância θ entre dois satélites, com um erro que é Gaussiano, dado por uma distribuição normal de média nula e desvio padrão igual a $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ metros. Dito de outra forma, para um objecto a uma distância real de θ metros, a leitura no sensor será de x metros com uma probabilidade dada por $p(x|\theta) = N(x|\mu = \theta, \sigma^2 = 9\times10^{-6})$. Suponhamos já antes tínhamos tentado determinar a distância ao mesmo alvo utilizando um aparelho com uma margem de erro maior, também gaussiana mas com desvio padrão $b = 10^{-2}$ metros. Esse aparelho inicial tinha dado uma leitura de $a = 105.11$metros. Tomando para prior de θ a distribuição $N(\theta|a, b^2)$, e sabendo que o novo aparelho dá uma medição de 105.099 metros, determine o posterior de θ, e uma região de credibilidade a 95% para θ.*

FIM