



# ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

## Conteúdos

Álgebra Linear

## Competências

Saber aplicar os conceitos e técnicas de Álgebra Linear indicados no programa na formulação e resolução de problemas de natureza teórica e na resolução de problemas matemáticos.

## Recursos

Folhas de rascunho. **Não é permitido** o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.

## CrITÉrios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.

Todas as justificações devem basear-se nos resultados demonstrados no manual da unidade, utilizando a mesma terminologia. Caso contrário, uma solução com outra terminologia ou método não receberá valores.

Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total desta prova é de 12 valores.

### **Normas a respeitar**

Está a redigir a sua prova na WISEflow. A prova não será de consulta, exceto se existirem materiais ou recursos indicados pelo Professor neste enunciado.

Deve identificar claramente, e em **bold**, o número de cada questão a que está a responder. As respostas devem ser ordenadas por ordem crescente. Sendo a identificação automática, não deve inserir uma folha de rosto antes das respostas a esta prova, pois a folha de rosto será gerada automaticamente na WISEflow.

Se incluir apêndices (por exemplo, fotografias tiradas com a câmara de vigilância), estes têm de ser importados para a resolução principal. As soluções que aparecem apenas como apêndice só serão corrigidas se for possível identificar claramente a posição pretendida no resolução principal. Mesmo neste caso, será aplicada uma dedução de penalização.

A utilização do parâmetro de personalização  $r'$  é obrigatória. Nos exercícios em causa, não serão atribuídos valores se  $r'$  não for substituído ou se for utilizado um valor incorreto de  $r'$ .

Relembremos que, apesar de estar a realizar a sua prova remotamente, deve ter um comportamento em tudo semelhante à realização da prova em contexto presencial num centro de provas:

O(a) estudante em avaliação remota deve, durante a prova online realizada através da WISEflow, seguir as seguintes instruções:

- Não se pode levantar durante a prova, incluindo ir à casa de banho;
- Deve procurar um lugar calmo, onde possa estar sozinho, com as costas viradas para uma parede;
- Deve desligar o telemóvel, ou qualquer outro dispositivo informático, com o qual possa aceder à Internet;
- No caso de se tratar de uma prova sem consulta, deve retirar todas as folhas, livros ou fotocópias de cima da mesa onde realizará a prova, exceto se autorizado pelo docente;
- Durante a prova, não pode conversar com pessoas independentemente, do teor da conversa.

Assim que estiver pronto(a) para submeter a prova, deve seleccionar a opção “ir para entrega” que está sinalizada a verde no canto superior direito da página.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

### Enunciado

Justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

- I.** (*1,0 valor*) Neste exercício, o valor de  $r'$  é os últimos dois dígitos do seu número de estudante mais 1. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então  $r' = 46$ .

Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , tal que

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ x & -2r' \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & r' + 2 \\ 1 & 1 - 2r' \end{bmatrix}$$

para algum  $x \in \mathbb{R}$ . Determine  $x$ .

**II.** (*4,0 valores*) Seja  $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  a aplicação

$$f(A) = A^T - A,$$

que é aplicação linear (pode assumir isso sem justificação). Determine os valores próprios de  $f$ .

**III.** (*4,0 valores*)

Neste exercício, o valor de  $r'$  é os últimos dois dígitos do seu número de estudante mais 1. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então  $r' = 46$ .

No espaço real  $\mathbb{R}_2[x]$ , sejam

$$p_1 = x^2 + 1 \quad p_2 = x^2 - x + 1 \quad p_3 = -x - 1$$

Sejam  $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$  e  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  uma aplicação linear, tal que

$$T(p_1) = r'p_1 \quad T(p_2) = p_3 \quad T(p_3) = p_2$$

$((p_1, p_2, p_3)$  é uma base, portanto esta aplicação é única). Determine a matriz  $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ .

**IV.** (*3,0 valores*)

Sejam  $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ , e  $\oplus : V \times V \rightarrow V, \otimes : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  as operações

$$x \oplus y = xy - 2x - 2y + 6$$

$$a \otimes x = (x - 2)^a + 2,$$

para todos  $x, y \in V, a \in \mathbb{R}$  (as operações nos lados direitos são as operações normais dos números reais).

Com justificação, determine se os axiomas (A3), (A4), e (M2) de um espaço vetorial real são validos no  $V$  com  $\oplus$  e  $\otimes$ .

FIM