U.C. 21030
Elementos de Análise Infinitesimal I

28 de janeiro de 2022

Critérios de avaliação

- Para a correção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efetuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizados afirmações ou cálculos incorretos.

Correção Sumária

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1.1. **Case Base: n = 1**. Tem-se $u_1 = 1 < \frac{3}{2}$, o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Fixado um $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que para esse n tem-se

$$u_n < \frac{3}{2}$$

Tese de indução:

$$u_{n+1} < \frac{3}{2}$$

(Aqui, o n é o mesmo que se fixou na hipótese de indução.)

Passo de indução: Atendendo ao modo como a sucessão está definida, decorre da hipótese de indução que

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 1 < \frac{\frac{3}{2}}{3} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Conclusão: Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{2}$.

1.2. Uma vez que, por hipótese, a sucessão é crescente e $u_n < \frac{3}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (cf. alínea 1.1), a sucessão é limitada:

$$1 = u_1 \leq u_n < \frac{3}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo a sucessão crescente e limitada, a sucessão é então convergente. cf. Teorema 2, pág. 652.

Designando por $a = \lim_n u_n$, segue-se tal como no Exercício 3.3 da Atividade Formativa 1 que

$$a = \lim_n u_{n+1} = \frac{\lim_n u_n + 3}{3} = \frac{a+3}{3} \iff a = \frac{3}{2}.$$

Ou seja, $\lim_n u_n = \frac{3}{2}$.

2.1. Pela diferenciabilidade das funções logaritmo e identidade em $]1, +\infty[$, resulta do Teorema 2, pág. 286, que a função f é diferenciável em $]1, +\infty[$ com

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}, \quad x > 1.$$

A função arco tangente é diferenciável em $\mathbb{R}$, assim como a função polinomial $x \mapsto x - 1$. Assim e em particular, resulta do Teorema 1, pág. 302, que a função f é diferenciável em $]-\infty, 1[$ com

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}, \quad x < 1.$$

Resta analisar a diferenciabilidade de f no ponto 1. Como a função restá definida de modo diferente para valores superiores e inferiores a 1, há que estudar, separadamente, a existência de derivadas laterais. Se existirem e coincidirem, então f será diferenciável em 1. Tal acontece. Por aplicação da Regra de Cauchy,

$$\begin{aligned} f_d'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\ln(x))'}{(x(x-1))'} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(2x-1)} = 1 \end{aligned}$$

e, por nova aplicação desta Regra,

$$\begin{aligned} f_e'(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\arctan(x-1)-\ln(1)}{x-1} \\ &= \lim_{y\to 0^-} \frac{\arctan(y)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{(\arctan(y))'}{(y)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+y^2} = 1. \end{aligned}$$

Conclusão, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-1)^2}, & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \frac{1-\ln(x)}{x^2}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

2.2. Por (1),

- $f'(x) > 0$ se $x < e$;
- $f'(x) = 0$ se $x = e$;
- $f'(x) < 0$ se $x > e$.

Consequentemente e pelo Teorema 1, pág. 337, f é crescente em $]-\infty, e]$ e decrescente em $[e, +\infty[$, sendo, por conseguinte, $x = e$ o máximo absoluto (cf. Teorema 2, pág. 338). Não havendo mais pontos críticos, a função não tem mínimo absoluto (cf. observação a seguir à Definição 3, pág. 338).

3.1. Como $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é, em particular, contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$, resulta do Teorema de Lagrange (pág. 317) que existe um ponto $c \in]0, 1[$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(1)-g(0)}{1-0} = 1.$$

3.2. Por hipótese e pela alínea anterior, existem dois pontos $c \in]0, 1[$ e $a \in]1, 2[$ tais que $g'(c) = 1$ e $g'(a) = 0$. Supondo que $g \in C^1(]0, 2[)$, tem-se que g' é em particular contínua em $[c, a] \subseteq]0, 2[$, resultando do Teorema de Bolzano (pág. 246) que existe um ponto $d \in]c, a[$ tal que $g'(d) = \frac{1}{5}$ (note-se que $g'(a) < \frac{1}{5} < g'(c)$).

4. Atendendo a que $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$, tem-se

$$\int \text{sen}(2x)\text{sen}^2(x)\, dx = 2 \int \text{sen}^3(x)\cos(x)\, dx,$$

em que, utilizando a substituição $t = \text{sen}(x)$, com $dt = \cos(x)dx$,

$$\int \underbrace{\text{sen}^3(x)}_{=t^3} \underbrace{\cos(x)\, dx}_{dt} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Dado que $t = \text{sen}(x)$, obtém-se então

$$\int \text{sen}(2x)\text{sen}^2(x)\,dx = 2 \cdot \frac{\text{sen}^4(x)}{4} + C = \frac{\text{sen}^4(x)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$