U.C. 21157
Resolução do exame de Cálculo para Informática

13 de julho de 2018

1. (a) Temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, cujo levantamento pode ser

$$\lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x+1)}{(x+3)} = \frac{6}{5}.$$

(b) Temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ e para a levantarmos podemos fazer o seguinte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+1+\arctan(x)}{5x^3-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{1+\arctan(x)}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{5}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1+\arctan(x)}{x^3}}{5-\frac{5}{x^3}}$$

Temos que

$$\frac{1-\frac{\pi}{2}}{x^3} \leq \frac{1+\arctan(x)}{x^3} \leq \frac{1+\frac{\pi}{2}}{x^3}$$

e como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\pi}{2}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\pi}{2}}{x^3} = 0,$$

então pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\arctan(x)}{x^3} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e também} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^3} = 0,$$

logo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+1+\arctan(x)}{5x^3-5} = \frac{1}{5}.$$

2. (a) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

pelo que f tem uma assíntota vertical para $x=0$. Quanto a assíntotas oblíquas (ou horizontais) verificamos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2},$$

que conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ e calculamos este limite usando a regra de Cauchy. Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

e também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Logo, não existem assíntotas oblíquas nem horizontais.

(b) Começamos por calcular a derivada

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \ x > 0.$$

Os termos e^x e x^2 são ambos positivos, pelo que a derivada tem o mesmo sinal que o termo $x-1$, isto é, f' é negativa no intervalo $]0,1[$, anula-se para $x=1$ e é positiva no intervalo $]1,+\infty[$. Assim, f é estritamente decrescente no intervalo $]0,1]$ e estritamente crescente no intervalo $[1,+\infty[$. f tem um mínimo local no ponto $x=1$ e como $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ (pela alínea anterior), então f não tem outros extremos locais.

(c) Temos que

$$f''(x) = \frac{\left[e^x(x-1)+e^x\right]x^2 - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \frac{e^x x\left[x^2-2x+2\right]}{x^4} = \frac{e^x\left[(x-1)^2+1\right]}{x^3}$$

que é positiva para $x>0$, pois $e^x>0$, $x^3>0$ e $(x-1)^2+1 \geq 1 > 0$. Concluímos que f tem a concavidade voltada para cima.

(d) Usando a informação recolhida nas alíneas anteriores, sabemos que f é estritamente decrescente no intervalo $]0,1]$ e estritamente crescente no intervalo $[1,+\infty[$, tem a concavidade voltada para cima e verifica $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Além disso f tem um mínimo local para $x=1$. Temos $f(1) = \frac{e}{1} = e$ e na Figura 1 representamos um esboço do gráfico f.

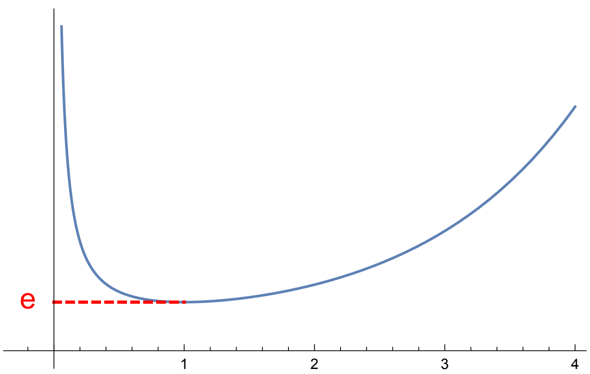

Figura 1: Esboço do gráfico de f.

(e) Temos que o polinómio de Taylor de ordem 2 de $f(x)$ no ponto $x=1$ é dado por

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2},$$

logo

$$p_2(x) = e + 0(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2} = e + e\frac{(x-1)^2}{2}.$$

3. Fazendo integração por partes, temos

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx.$$

Também por integração por partes se obtém

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx.$$

Então

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx\right) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)dx.$$

Logo

$$2\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x),$$

pelo que

$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

4. Temos que uma primitiva da função $\frac{x}{5} - \cos(\pi x) + 4$ é a função $g(x) = \frac{x^2}{10} - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} + 4x$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_0^5 \left(\frac{x}{5} - \cos(\pi x) + 4\right) dx = g(5) - g(0) = \frac{25}{10} - \frac{\sin(5\pi)}{\pi} + 20 = \frac{5}{2} + 20 = \frac{45}{2}.$$

FIM