

Exercícios

13 de Janeiro de 2011

1 Limites

1. Calcule os seguintes limites:

1.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1};$

1.2. $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^2+y-6}{y+3};$

1.3. $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^3 - u^2.$

2. Utilizando o facto de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, calcule:

2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(kx)}{x}, k \in \mathbb{R}.$

2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\text{sen}(\beta x)}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$

2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x}.$

2.4. $\lim_{u \rightarrow +\infty} u \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{u}\right).$

2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$
(sugestão: multiplique e divida a expressão por $1 + \cos(x)$).

2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$
(sugestão: recorra à alínea anterior).

2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
(sugestão: multiplique e divida a expressão por $1 + \cos(x)$).

3. Calcule os seguintes limites:

3.1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \text{sen}(x)}{\text{sen}(2x)}.$

3.2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(2x)}$.

3.3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}(x)}{\cos(2x)}$.

4. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, mostre que:

4.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\alpha} - e^\alpha}{x} = e^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = \alpha - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x + 2x}{e^x - 1} = 3$.

4.4. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$.

5. Recorrendo ao facto de que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+1)}{\log(x)} = 1$, determine qual é o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\log(x)}}.$$

6. Calcule os seguintes limites:

6.1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16}$.

6.2. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$.

6.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4-x)^2-16}{x}$.

7. Seja $f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{se } x < 2 \\ 7x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$. Determine

7.1 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

7.2 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

7.3 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

8. Seja $f(x) = \begin{cases} x^3-6, & \text{se } x < 2 \\ x^2/2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$. Determine

8.1 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

8.2 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

8.3 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

9. Seja $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Calcule

9.1 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

9.2 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

9.3 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

10. Seja $f(x) = \frac{x-2}{(x-3)^2}$. Calcule

10.1 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

10.2 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

10.3 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.