Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Período de Realização

Decorre de 29 de março a 4 de abril de 2022

Data de Limite de Entrega

4 de abril de 2022, até às 23h59 de Portugal Continental

Temas

Tópico 1 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 1,0 valores
2. 0,8 valores
3. 0,4 valores
4. 0,8 valores

Total: 3,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-|x|}$.

a) Sendo $\mathcal{P}_n$ uma decomposição de $[-1,1]$ constituída por um número n de pontos equidistantes, calcule as somas superior e inferior de Darboux, $S_{\mathcal{P}_n}(f)$ e $s_{\mathcal{P}_n}(f)$ respetivamente.

b) Recorrendo à alínea anterior, mostre que f é integrável à Riemann em $[-1,1]$ e calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f$.

2. Considere a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin(1/x)) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

onde sgn é a chamada “função sinal”, definida por

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -1 & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

a) Mostre que o conjunto de pontos de descontinuidade de φ é numerável.

b) Prove que φ é integrável à Riemann[1] em $[0, 1]$.

c) Conclua que[2] $\int_0^1 \varphi(x)dx < 0$.

3. Seja Ω o subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ delimitado pelas linhas de equação $y = x$, $y = 2 - x$, $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$. Esboce Ω e, recorrendo a métodos do cálculo integral, determine a sua área.

4. Seja ψ o prolongamento por continuidade ao ponto $x = 0$ da função que, para $x \neq 0$, é dada por $\frac{\arctan x}{x}$. Recorrendo aos desenvolvimentos em série de McLaurin que deve conhecer de cor[3] e usando os teoremas apropriados (que deve indicar explicitamente quais são), determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função ψ e da série de Taylor de ψ no ponto 1. Indique explicitamente qual os respetivos domínios de convergência absoluta. Aproveite os resultados obtidos para determinar os valores de $\psi^{(35)}(0)$ e de $\psi^{(35)}(1)$, onde $\psi^{(k)}$ representa a derivada de ψ de ordem k.

FIM

[1] Sugestão: recorra à caracterização das funções integráveis à Riemann estabelecida por Henri Lebesgue. Cf. Campos Ferreira: *Introdução à Análise Matemática*, 1ª Ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1987; pp. 532–533.

[2] Sugestão: NÃO tente calcular explicitamente o valor do integral! Poderá ser útil tentar esboçar o gráfico de φ.

[3] As séries de McLaurin que *devem* ser conhecidas de cor são as séries das funções e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\frac{1}{1-x}$, bem como os respetivos domínios de convergência absoluta.