

U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística

4 de setembro de 2018

- INSTRUÇÕES -

- A prova é composta por 4 grupos de questões e contém 5 página(s). O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta).
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Todas as questões deverão ser **respondidas e justificadas** na folha de ponto, devidamente identificada. Utilize unicamente tinta azul ou preta e uma letra legível.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. No final do enunciado encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se estas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

COTAÇÃO E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO:

- Correção científica das respostas; escrita clara e objectiva; estrutura lógica das respostas.
- Apresentação de cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justificação cuidadosa e detalhada de todos os cálculos, raciocínios e afirmações. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- O aluno pode arbitrar um valor adequado da resposta a uma alínea que não tenha respondido, caso este seja necessário para a resolução de uma alínea posterior.
- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos 4 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3
Cotação	0.75	1	0.75	1	1.5	4.5	2	2.5	1.5	3	0.75	0.75

- 1 O Titanic afundou em 1912, quase 1500 pessoas morreram, a maior parte delas homens. A tabela seguinte mostra o número de pessoas que sobreviveram por sexo (Fonte: Journal of Statistics Education, 3(3), 1995).

	Homens	Mulheres
Sobreviveram	367	344
Não sobreviveram	1364	126

Considere que escolhe uma pessoa ao acaso da lista de pessoas que estavam a bordo do Titanic.

- 1.1 Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha sobrevivido?
 - 1.2 Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha sobrevivido sabendo que era mulher? Comente a resposta comparando com o resultado obtido em 1.1.
 - 1.3 Qual a probabilidade de que essa pessoa seja homem?
 - 1.4 Qual a probabilidade de que essa pessoa seja homem sabendo que não sobreviveu? Comente a resposta comparando com o resultado obtido em 1.2 e 1.3.
 - 1.5 Utilizando a definição, verifique se os eventos "Não sobreviveu" e "É homem" são independentes.
- 2 Um grupo de adolescentes, constituído por 12 raparigas e 6 rapazes, entra num elevador cuja carga máxima é de 900 kg. Suponha que os pesos, expressos em kg, dos adolescentes podem ser representados por variáveis aleatórias reais, independentes e gaussianas (normais), de média 50 kg e desvio padrão 5 kg no caso das raparigas, e de média 60 kg e desvio padrão 10 kg no caso dos rapazes.
- 2.1 Calcule a probabilidade de ser excedida a carga máxima do elevador.
 - 2.2 Qual a probabilidade do peso total no elevador estar entre 1000 e 1200 kg?
- 3 A emissão de uma fonte radioativa é tal que o número de partículas emitidas em cada período de 10 segundos é bem modelado por uma variável aleatória, X , seguindo a lei de Poisson e tal que $E(X^2) = 6$.
- 3.1 Calcule a probabilidade de serem emitidas, num período de 10 segundos, 2 partículas.
 - 3.2 Calcule a probabilidade de serem emitidas, num período de 10 segundos, mais de 3 partículas.

- 4 Uma empresa de fiscalização de obras de construção civil tem 7 fiscais, dos quais 2 são engenheiros. Para visitar as obras de uma ponte ferroviária foram selecionados ao acaso 3 fiscais.
- 4.1 Determine a função de probabilidade da variável aleatória que representa o número de fiscais que são engenheiros selecionados para efectuar a visita.
 - 4.2 Qual o valor esperado do número de fiscais engenheiros selecionados para a efectuar a visita?
 - 4.3 Qual o valor da variância do número de fiscais engenheiros selecionados para a efectuar a visita?

FORMULÁRIO

Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se } P(B) > 0$$

Teorema de Bayes

Se $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ é uma partição de Ω (espaço de resultados), então, $\forall B$ para o qual $P(B) > 0$, ter-se-á:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)}$$

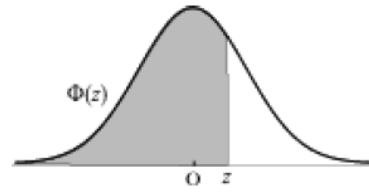
Tabela de Distribuições

	$P(X = k)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N, M, n)$	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	λ	λ
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Note que: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon ; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon .$$