Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 2 a 10 de Maio de 2020

Tema

Filas de espera e gestão de projectos

Enunciado

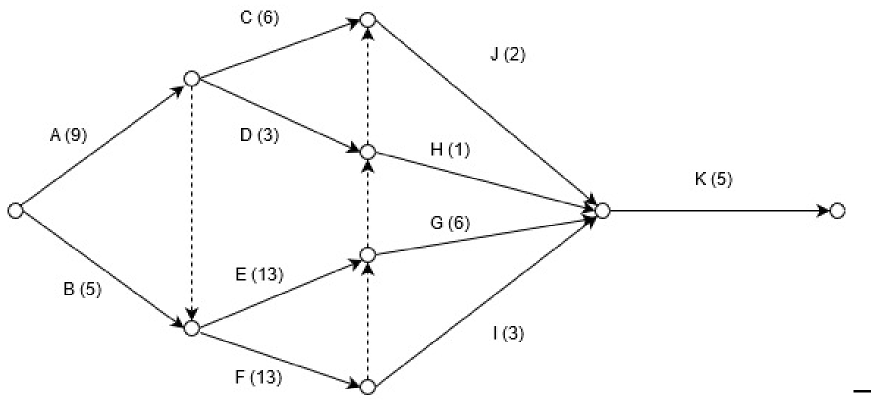
1. Considere um projecto com as actividades A, B, C, D, E, F, G, H , I, J e K. Na tabela seguinte apresentam-se as precedências e a duração (em dias) de cada um das actividades.

Actividades	Precedências	Duração (dias)
A	—	9
B	—	5
C	A	6
D	A	3
E	A, B	13
F	A, B	13
G	E, F	6
H	D, E, F	1
I	F	3
J	C, D, E, F	2
K	G, H, I, J	5

a) (0.5 val.) Desenhe a rede do projecto.

newpage

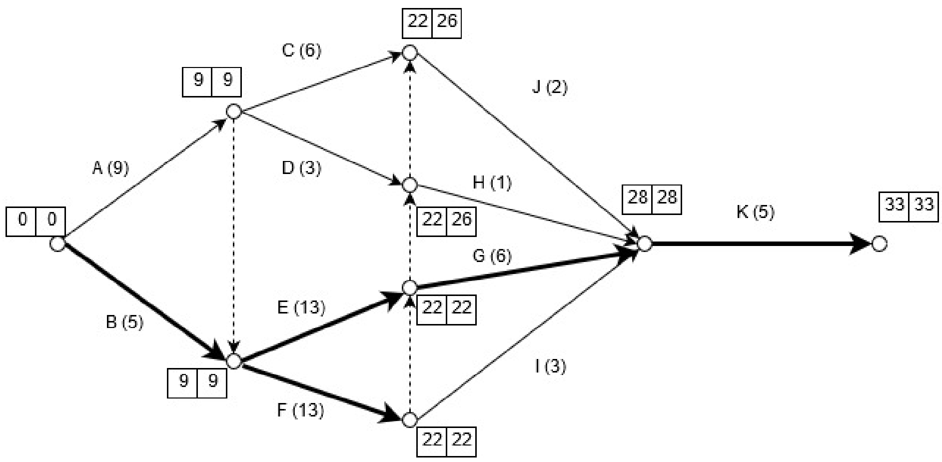
Resolução:



feito em https://www.diagrameditor.com/

b) (0.5 val.) Indique a duração do projecto. Qual o caminho crítico? Justifique.

Resolução:



A duração do projecto é de 33 dias, sendo o caminho crítico formado pelas actividades B, E+F, G, K.

c) (0.5 val.) A actividade C é executada por uma máquina que, devido a uma avaria, só pode começar a funcionar 12 dias depois de iniciado o projecto. Que consequência teve para o projecto? E se a avaria se verificasse na máquina que executa a actividade E, que consequências haveria para o projecto?

Resolução:
A actividade C demora 6 dias a ser executada. Mesmo que só consiga começar a funcionar ao fim de 12 dias, antes de terem decorridos 22 dias estará concluída, pelo que não afectará a realização a tempo do projecto.

Se a actividade E só puder começar ao fim de 12 dias, em vez de começar após 9 dias, fará com que o tempo de duração do projecto aumente 3 dias, visto que a activiade E só estará concluída ao fim de 25 dias.

d) (0.5 val.) Admita que é possível reduzir o tempo de execução das actividades de acordo com a seguinte tabela.

Actividades	ΔT (u. tempo)	ΔC (u.m.)
A	4	52
B	3	9
C	—	—
D	—	—
E	5	5
F	3	10
G	5	22,5
H	—	—
I	—	—
J	1	12
K	2	10

Observação: O valor da coluna ΔC corresponde ao custo total da redução ΔT. É possível reduzir apenas parte de ΔT com o custo proporcional à parte reduzida.

Que reduções devem ser implementadas para que a duração total do projecto seja reduzida em 10% e o incremento no custo total do projecto seja mínimo? Qual é o incremento no custo total do projecto?

Resolução: Tendo em conta que a duração do projecto é de 33 dias e que assumimos reduções apenas de dias completos (u.t. = dias), como queremos reduzir o seu tempo de duração em 10% (3,(3) dias), então iremos reduzir a duração em 4 dias.

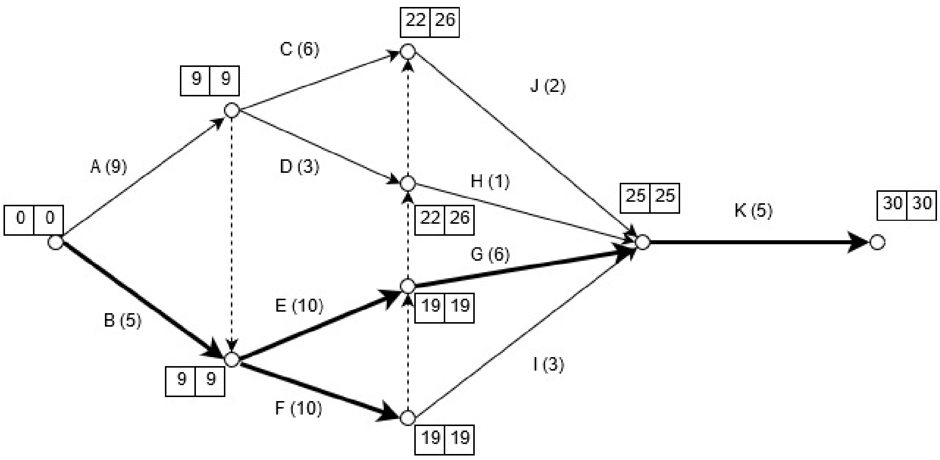
Temos o caminho crítico – A, E+F, G, K – com a respectiva tabela de reduções.

Actividade	ΔT	ΔC
A	4	52
E	5	5
F	3	10
G	5	22,5
K	2	10

Assim, temos o seguinte resultado.

Hipóteses de redução	A	E+F	G	K	1.ª Redução
ΔC (u.m.)	52	5 10	22.5	10	3 u.t. em E+F
ΔT (u.t.)	4	5 3	5	3	Custo=13 u.m.
C.U.R (u.m./u.t.)	13	4.(3)	4.5	5	Custo Acumulado = 13 u.m.

Após a 1.ª redução, reduziu-se 3 dias de duração do processo (ainda abaixo dos 10% exigidos) com um custo de 13 u.m.



O caminho crítico continua a ser A, E+F, G, K com a seguinte tabela de reduções.

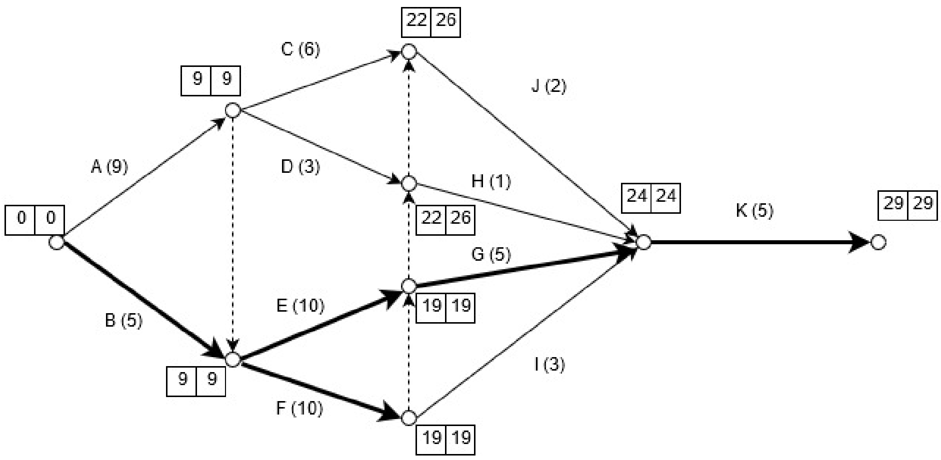
Actividade	ΔT	ΔC
A	4	52
E	2	2
G	5	22,5
K	2	10

Note-se que já não é possível reduzir a duração da actividade F, pelo que a secção do caminho E+F já não pode ser reduzida. Assim, temos o seguinte resultado.

Hipóteses de redução	A	G	K	1.ª Redução
ΔC (u.m.)	52	22.5	10	5 u.t. em G
ΔT (u.t.)	4	5	3	Custo=22.5 u.m.
C.U.R (u.m./u.t.)	13	4.5	5	Custo Acumulado = 13+22.5=25.5 u.m.

Mas como queremos reduzir 10% da duração do processo com o menor custo possível, na 2.ª redução basta reduzir 1 u.t. na actividade G com um custo de 22.5/5=4.5 u.m.

Assim, consegue-se reduzir a duração do projecto em 4 dias com um custo de 17.5 u.m., fazendo uma redução de 3 dias nas actividades E e F e uma redução de 1 dia na actividade G. Obtém-se a rede seguinte.



2. Uma empresa de decoração de interiores abre no próximo mês de setembro na zona do Chiado. A empresa pretende contratar um número de arquitectos de interiores superior a 1 de forma a que nenhum cliente espere mais de 10 minutos por atendimento personalizado. A taxa média de chegadas é de 1 cliente de 15 em 15 minutos, segundo a distribuição Poisson. A duração de cada atendimento é de 30 minutos, segundo a distribuição Exponencial negativa.

a) (0.2 val.) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado.

Resolução:

Trata-se de um sistema $M/M/S$ (População=∞, Fila máxima=∞) porque tanto o processo de chegada de clientes como do tempo de chegada correspondem a processos Poissonianos e o número de servidores é $S > 1$ (desconhecido).

Processo de chegadas Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = 1/15$ clientes por minuto (1 cliente de 15 em 15 minutos, ou seja, 4 cientes por hora).

Duração do serviço com distribuição Exponencial Negativa com taxa de atendimento de $\mu = 1/30$ clientes por minuto por cada um dos S servidores.

Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

b) (1.0 val.) Determine o número mínimo de arquitectos de interiores que devem ser contratados para que o tempo médio de espera de cada cliente seja inferior a 10 minutos.

Resolução:

Sabemos que S> 1, mas de valor desconhecido.
Vamos supor que $S = 2$.

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{30}} = 1$$

Ainda não verifica $\rho < 1$.

Vamos supor $S = 3$.

$$\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{30}} = \frac{2}{3} < 1\surd$$

$S = 3$ já é uma possibilidade, mas é preciso verificar se satisfaz $W_q < 10$ (tempo de espera inferior a 10 minutos).

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left(\frac{S^S\rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S}\frac{(S\rho)^n}{n!}\right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{3^3\left(\frac{2}{3}\right)^4}{3!(1-\frac{2}{3})} + \sum_{n=0}^{3}\frac{(3\frac{2}{3})^n}{n!}\right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{\frac{2^4}{3}}{2} + 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right)^{-1} = \\
&= 9^{-1} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} = \\
&= \frac{3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{9}}{3! \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \\
&= \frac{\frac{2^4}{27}}{\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

$$
W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{15}} = \frac{40}{3} = 13,(3) > 10
$$

Logo, 3 servidores ainda não são suficientes para que o tempo de espera seja inferior a 10 minutos.

Vamos supor $S = 4$.

$$
\rho = \frac{\lambda}{4\mu} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{4}{30}} = \frac{1}{2} < 1 \surd
$$

Para $S = 4$ é preciso verificar se satisfaz $W_q < 10$ (tempo de espera inferior a 10 minutos).

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left(\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!} \right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5}{4!(1-\frac{1}{2})} + \sum_{n=0}^{4} \frac{(4\frac{1}{2})^n}{n!} \right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{\frac{4^2}{2}}{12} + 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{2}{3} + 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{23}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{23}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
L_q &= \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} = \\
&= \frac{4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{3}{23}}{4! \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \\
&= \frac{\frac{24}{23}}{6} = \\
&= \frac{4}{23}
\end{aligned}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{4}{23}}{\frac{1}{15}} = \frac{60}{23} \sim 2,6$$

Logo, com 4 servidores o tempo médio de espera é inferior a 10 minutos.

Para as restantes questões assuma o número de servidores determinado na alínea b).

c) (0.2 val.) Qual o tempo, em média, que cada cliente passa na loja?
Resolução:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{60}{23} + 30 \sim 32,6 \text{ minutos}$$

Cada cliente passa, em média, 32,6 minutos na loja.

d) (0.3 val.) Qual a probabilidade de estarem dois cliente à espera de atendimento personalizado?
Resolução:

Para estarem 2 clientes à espera na loja, então todos os 4 servidores estão ocupados. Assim, estão no sistema 6 clientes.

$$\begin{aligned}
P_6 &= \frac{S^S \rho^6}{S!} P_0 = \\
&= \frac{4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6}{4!} \frac{3}{23} = \\
&= \frac{4}{4!} \frac{3}{23} = \\
&= \frac{3}{6 \times 23} = \frac{1}{46} \sim 2.2\%
\end{aligned}$$

A probabilidade de ter 2 clientes à espera na loja é de 2.2%.

e) (0.3 val.) Qual a probabilidade de um cliente esperar no máximo 5 minutos para ser atendido? E mais de 10 minutos?

Resolução:

Probabilidade de esperar no máximo 5 minutos para ser atendido:

$$\begin{aligned}
P(W_q \leq 5) &= 1 - P(W_q > 5) = \\
&= 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu 5(1-\rho)} = \\
&= 1 - \frac{\left(4\ \frac{1}{2}\right)^4 \frac{3}{23}}{4!\left(1-\frac{1}{2}\right)} e^{-4\frac{1}{30}5\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \\
&= 1 - \frac{2^4 \frac{3}{23}}{12} e^{-\frac{1}{3}} = \\
&= 1 - \frac{4}{23} e^{-\frac{1}{3}} \sim 87.5\%
\end{aligned}$$

Probabilidade de esperar mais de 10 minutos para ser atendido:

$$\begin{aligned}
P(W_q > 10) &= P(W_q > 10) = \\
&= \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu 10(1-\rho)} = \\
&= \frac{\left(4\ \frac{1}{2}\right)^4 \frac{3}{23}}{4!(1-\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-4\frac{1}{30}10\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \\
&= \frac{2^4 \frac{3}{23}}{12} e^{-\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{24}{23} e^{-\frac{2}{3}} \sim 8.9\%
\end{aligned}$$

FIM