ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve Resolução

Grupo I.

1. Como $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$, os valores próprios da matriz A são 0, -1 e 2, três valores próprios diferentes para uma matriz 3×3.

Podemos assim concluir que o seu traço é $0 - 1 + 2 = 1$, o seu determinante é $0 \times (-1) \times 2 = 0$, A é diagonalizável, e cada valor próprio tem multiplicidade geométrica (e algébrica) igual a 1. A opção correcta é d).

2. Como $F \subset G$, podemos concluir que $F + G = G$ e $F \cap G = F$, portanto c) é verdadeira e d) é falsa.

Para mostrar que a) e b) não são (sempre) verdadeiras podemos considerar os contra-exemplos:

$E = \mathbb{R}^5$, $G = \langle (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0) \rangle$, $H = \langle (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0) \rangle$, onde é fácil ver que $G + H$ tem dimensão 4 (e portanto é diferente de E).

3. Como $h\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, podemos concluir que a última coluna da matriz que representa h em relação à base dada é $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, e portanto a), b) e d) são falsas.

Para mostrar que c) é verdadeira teremos ainda de verificar que:

$$h\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. f pode não ser linear, pois $\operatorname{adj} A$ é construída a partir de determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ obtidas suprimindo uma linha e uma coluna de A. Como, para uma matriz, B, $m \times m$, se tem $\det(\alpha B) = \alpha^m \det B$, podemos concluir que $f(\alpha A) = \alpha^{n-1} f(A)$ (e portanto f não é linear se $n \geq 3$).

h também não é linear (a não ser que $n = 1$), pois $h(\alpha A) = \alpha^n h(A)$.

g não é linear, pois $g\big(\alpha(x,y)\big) = (\alpha x, \alpha y, \alpha^2 x(x+y))$, que pode ser diferente de $\alpha(x,y,x(x+y)) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x(x+y))$.

p é linear, pois
$p\big((a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)\big) = (a_1+a_2)(1,1,1,1) = a_1(1,1,1,1)+a_2(1,1,1,1) = p(a_1,b_1,c_1)+p(a_2,b_2,c_2)$ e
$p\big(\alpha(a,b,c)\big) = (\alpha a)(1,1,1,1) = \alpha\big(a(1,1,1,1)\big) = \alpha p(a,b,c)$.

A opção correcta é c).

Grupo II.

i) $f(2,0,0,0) = 2x^2 + 2 = 2 \times 1 + 2x^2 + 0.x$, logo a primeira coluna de A é $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$f(-1,1,0,0) = -x^2 + x = 0 \times 1 + (-1)x^2 + 1.x$, logo a segunda coluna de A é $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$f(1,1,2,0) = x^2 + x + 2 = 2 \times 1 + 1.x^2 + 1.x$, logo a terceira coluna de A é $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$f(2,1,1,1) = 2x^2 + x + 3 = 3 \times 1 + 2x^2 + 1.x$, logo a quarta coluna de A é $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Assim, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Esquematicamente tem-se

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
\mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_2' \\
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]} \circ f", "QA"'] & \mathbb{R}_2[x] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[x]}", "Q"'] & \mathbb{R}_2[x]
\end{tikzcd}$$

Da proposição 5.39 (ou da proposição 5.42) sabemos que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2') = \mathcal{M}(\mathrm{id};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2')\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2),$$

portanto em cada coluna de Q vão estar as coordenadas, na base $\mathcal{B}_2'$, de cada elemento de $\mathcal{B}_2$.

Como $1 = 0(x^2 + x + 1) + 0(x + 1) + 1 \times 1$, a primeira coluna de Q é $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como $x^2 = 1(x^2+x+1) - 1(x+1) + 0 \times 1$, a segunda coluna de Q é $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (Como é muito fácil "adivinhar" a solução de $x^2 = q_{12}(x^2 + x + 1) + q_{22}(x + 1) + q_{32}$ é escusado resolver formalmente este sistema.)

Como $x = 0(x^2 + x + 1) + 1(x + 1) + (-1) \times 1$, a terceira coluna de Q é $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Assim, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(Como "prova dos nove" podemos calcular a primeira coluna de QA, que é $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e verificar se $f(2, 0, 0, 0) = 2x^2 + 2$ é de facto igual a $2(x^2 + x + 1) - 2(x + 1) + 2$.)

Grupo III.

Tem-se $\det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$, e portanto os valores próprios são $\lambda \in \{1, 2\}$.

O espaço próprio associado a $\lambda = 1$ corresponde às soluções de $x = y = w = 0$, e portanto é gerado pelo vetor não nulo $(0,\ 0,\ 1,\ 0)^\top$.

O valor próprio $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1.

O espaço próprio associado a $\lambda = 2$ corresponde às soluções de $z = w = 0$, e portanto é gerado pelos vetores linearmente independentes $(1,\ 0,\ 0,\ 0)^\top$ e $(0,\ 1,\ 0,\ 0)^\top$.

O valor próprio $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 2.

Grupo IV.

i) Uma vez que

$$A^2 + A - 6I_n = 0 \implies A(A + I_n) = 6I_n \implies A \times \frac{1}{6}(A + I_n) = I_n,$$

a matriz A é invertível e a sua inversa é $A^{-1} = \frac{1}{6}(A + I_n)$.

ii) Se λ é valor próprio de A então existe $u \neq 0$ tal que $Au = \lambda u$ e o que implica que $A^2u = A(Au) = \lambda^2 u$, e portanto

$$A^2u + Au = (\lambda^2 + \lambda)u.$$

Mas por hipótese $A^2u + Au - 6u = 0$ e portanto $A^2u + Au = 6u$. Usando as duas últimas igualdades obtemos
$(\lambda^2 + \lambda)u - 6u = 0 \implies (\lambda^2 + \lambda - 6)u = 0 \implies \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, pois por hipótese $u \neq 0$.

iii) Tem-se $(-2)^2 + (-2) - 6 = -4 \neq 0$, e portanto $\lambda = -2$ não é solução de $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Pela alínea anterior concluímos que -2 não é valor próprio da matriz A.

FIM