$\boxed{21082}$ - Actividade Formativa 1

I - Escolha múltipla

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. A partição conjugada de $4+3+2+2+1$ é:

☐ **a)** $1+2+2+3+4$.

☐ **b)** $4+3+2+2+1$.

☐ **c)** $5+4+2+1$.

☐ **d)** $1+2+4+5$.

2. Qual das seguintes expressões define uma aplicação sobrejectiva $f\colon [4]\times[5]\to[20]$?

☐ **a)** $f(n,m) = n\cdot m$

☐ **b)** $f(n,m) = 5(n-1)+m$

☐ **c)** $f(n,m) = n\cdot m - n - m + 1$

☐ **d)** $f(n,m) = 5(n-1)+4(m-1)$

3. $\binom{2n}{n}$ é igual a:

☐ **a)** $\dfrac{(2n)!}{(n^2)!}$.

☐ **b)** $(2n)^{\underline{n}}$.

☐ **c)** 2^n.

☐ **d)** $\dfrac{(2n)^{\underline{n}}}{n!}$.

4. O número de diferentes maneiras de particionar um conjunto de n objectos em duas partes não vazias é:

☐ **a)** $2^{n-1}-1$.

☐ **b)** $\dfrac{n}{2}$.

☐ **c)** 2^n-2.

☐ **d)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$.

5. O Sr. Grandevida convidou N pessoas para uma festa. Cada convidado chega sozinho e cumprimenta cada um dos presentes (incluindo o Sr. Grandevida) com um aperto de mão. Quantos apertos de mão são dados?

☐ **a)** $N^2/2$.

☐ **b)** $N(N+1)$.

☐ **c)** $(N+1)^2/2$.

☐ **d)** $(N+N^2)/2$.

6. De quantas maneiras se podem re-arranjar as letras da palavra SOSSEGO?

☐ **a)** $7!$.

☐ **c)** $4! \cdot 3 \cdot 2$.

☐ **b)** $4!\,3!\,2!$.

☐ **d)** $\dfrac{7!}{3!2!}$.

7. O número de permutações do conjunto [4] que levam 1 para um lugar diferente do segundo é:

☐ **a)** $3 \cdot 3!$.

☐ **c)** $3!$.

☐ **a)** $4^{\underline{3}}$.

☐ **d)** $4! - 3$.

8. Dados 3 dados, um preto, um vermelho, um amarelo, quantas são as maneiras de sairem **exactamente** dois números iguais?

☐ **a)** 540.

☐ **c)** 90.

☐ **b)** 180.

☐ **d)** 30.

9. Considere as seguintes afirmações relativas a dois conjuntos não vazios X e Y:

(i) *O conjunto X é enumerável*

(ii) *O conjunto Y é enumerável*

(iii) *Existe uma aplicação sobrejectiva $f\colon X \to Y$*

☐ **a)** Se (ii) e (iii) são verdadeiras então (i) é verdadeira.

☐ **b)** Se (i) e (iii) são verdadeiras então (ii) é verdadeira.

☐ **c)** Se (iii) é verdadeira então (i) e (ii) são verdadeiras.

☐ **d)** $\#X = \#Y = \aleph_0$.

II - Problemas

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

10. Descreva uma correspondência biunívoca entre as sequências estritamente crescentes do tipo $a_1a_2a_3a_4$ com $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 100$ e as sequências de números naturais $b_1b_2b_3b_4$ tais que $\sum_{i=1}^{4} b_i \leq 100$.

11. Mostre que num conjunto finito com duas ou mais pessoas, há sempre duas que têm exactamente o mesmo número de amigos. [*Sugestão*: Utilize o teorema dos cacifos.]

12. De quantas maneiras se pode constituir um grupo com cinco pessoas a partir de quatro professores e sete alunos se

a) não há restrição na selecção;

b) o grupo tem que incluir exactamente dois professores;

c) o grupo tem que incluir pelo menos três professores.

13. Cinco rapazes e cinco raparigas vão sentar-se numa bancada. Indique de quantas maneiras se podem sentar, para cada uma das seguintes condições:

a) Os rapazes sentam-se todos nos cinco lugares à esquerda.

b) Nenhum par de rapazes se senta em lugares contíguos.

c) O Pancrácio e a Engrácia têm de ficar lado a lado.

14. Considere um baralho normal de 52 cartas. Quantas mãos de ...

a) ... duas cartas é que existem?

b) ... duas cartas que formam um par é que existem?

c) ... quatro cartas em que exactamente três são do mesmo naipe é que existem?

15. O Mário e a Lídia estão a fazer um jogo. O Mário pensa num número de 0 até 999999 e a Lídia tenta adivinhar esse número de acordo com as pistas dadas pelo Mário. Para facilitar não é permitido repetir algarismos. (Portanto o Mário não pode pensar no número 3675 = 003675, nem no número 999999, mas pode pensar em 12345 = 012345.)

a) Quantos são os números possíveis em que o Mário pode pensar?

b) No primeiro jogo, a Lídia indica o número 257981. O Mário diz que a Lídia tem os 6 algarismos correctos, estando 4 algarismos no lugar certo e 2 no lugar errado. Quantos são os números que estão nas condições do número que o Mário pensou?

c) No segundo jogo, a Lídia indica o número 12345. O Mário diz que a Lídia tem os 6 algarismos correctos, estando 3 algarismos no lugar certo e 3 no lugar errado. Quantos são os números que estão nas condições do número que o Mário pensou?

d) No terceiro jogo, a Lídia indica o número 140892. O Mário diz que a Lídia tem 3 algarismos correctos e nos lugares correctos e 3 algarismos incorrectos. Quantos são os números que estão nas condições do número que o Mário pensou?

16. **a)** De quantas maneiras se podem re-arranjar as letras da palavra CHAMADA?

b) E se impusermos a restrição de aparecerem três A's consecutivos?

c) E se impedirmos que ocorram dois A's consecutivos?

17. Qual é o coeficiente de:

a) a^3b^8 no desenvolvimento de $(3a-b)^{11}$?

b) x^4y^2z no desenvolvimento de $(2x+3y+4z)^7$?

18. Mostre, por indução matemática, que: $(n+1)! = 1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}}$.

19. Obtenha a igualdade $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ recorrendo à convolução de Vandermonde.

20. **a)** Mostre através de um argumento combinatorial que, para $k-2 \geq i \geq 2$,

$$\binom{k}{i} = \binom{k-2}{i} + 2\binom{k-2}{i-1} + \binom{k-2}{i-2}.$$

b) Usando uma igualdade similar à indicada em a), escreva $\binom{k}{i}$ em termos dos coeficientes binomiais da forma "combinações $k-3$ tomadas *qualquer coisa a qualquer coisa*".

21. Para $m \geq n$, mostre a igualdade $\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

a) por indução;

b) através dum argumento combinatorial;

22. Um corpo eleitoral de 500 pessoas é chamado a votar secretamente em 5 candidatos para a presidência de uma dada associação. Não são permitidas abstenções, mas é possível votar em branco. De quantas maneiras pode resultar o escrutínio?

23. Quantas são as maneiras de distribuir oito laranjas idênticas e quatro maçãs distintas (uma de cada variedade) por seis sacos distintos?

24. Quantas soluções tem a equação $x_1+x_2+x_3 = 100$, onde x_1, x_2 e x_3 são números naturais, com $x_2 \geq x_1$?

25. Considere um grupo constítuido por dois homens, três mulheres e quatro crianças.

a) Quantas possibilidades existem de todas as pessoas terem nascido em meses distintos?

b) Quantas possibilidades existem de modo a que nem os dois homens tenham nascido no mesmo mês, nem as três mulheres tenham nascido no mesmo mês, nem as quatro crianças tenham nascido no mesmo mês?

26. Num grupo de 200 alunos do 1º ano do curso de Matemática, há 120 alunos que já aprovaram a Álgebra Linear, há 82 que já aprovaram a Análise 1, há 47 que já aprovaram a Geometria, há 10 que já aprovaram às três disciplinas e 25 reprovaram a todas. Quantos alunos têm exactamente 1 disciplina por fazer?

27. De quantas maneiras se pode re-arranjar as letras da palavra SANGUESSUGA de modo a que nem os três S's, nem os dois A's, nem os dois U's apareçam em bloco?

FIM