E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: Álgebra Linear I

CÓDIGO: 21002

DOCENTE: Adelino Paiva

A preencher pelo estudante

NOME: Luís Carlos Crispim Pereira

N.º DE ESTUDANTE: 2300163

CURSO: LEI – Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 08/12/2025

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1. Enunciado:

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{a)} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{b)} \xrightarrow[\substack{l_2+2l_1 \\ l_3-3l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]_{c)}$$

$$\xrightarrow[l_3-l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]_{d)} \xrightarrow[\substack{l_1-l_3 \\ l_2-5l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]_{e)}$$

1.1. No exercício está a utilizar-se a matriz aumentada $[A \mid I_3]$ e a aplicar operações elementares de linha segundo o método de Gauss-Jordan, com o objetivo de obter uma matriz da forma $[I_3 \mid A^{-1}]$.

Desta forma, o que se pretende determinar é a matriz inversa de A, isto é, A^{-1}.

1.2. A partir da etapa d a resolução esta incorreta. Na passagem de c para d é aplicada a operação $l_3 - l_2$, na parte esquerda da matriz a operação é feita corretamente, mas na parte direita houve um erro de calculo $[0, -3, 1] - [1, 2, 0] = [-1, -5, 1]$ e não $[-1, -1, 1]$, assim a etapa d está errada, e todas as etapas subsequentes ficam afetadas por este erro.

1.3.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{a)} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{b)} \xrightarrow[\substack{l_2+2l_1 \\ l_3-3l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]_{c)}$$

$$\xrightarrow[l_3-l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right]_{d)} \xrightarrow[\substack{l_1-l_3 \\ l_2-5l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 27 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right]_{e)}$$

Logo,

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 27 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Enunciado:

$$\begin{cases} -x+y-z=-3 \\ \alpha x+\alpha y=\beta \\ \alpha y-z=-4 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ \alpha & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+\alpha l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2\alpha & -\alpha & \beta-3\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \\ 0 & 2\alpha & -\alpha & \beta-3\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \beta-3\alpha+8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\alpha=2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \xrightarrow[\beta\neq-2]{} Impossível \\ \xrightarrow[\beta=-2]{} Possivel\ Indeterminado \end{array}$$

2.1. Para todos os valores de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, estude a existência e o número de soluções do sistema $\begin{cases} -x+y-z=-3 \\ \alpha x+\alpha y=\beta \\ \alpha y-z=-4 \end{cases}$ determinando, em função de α e β, os casos em que o sistema é impossível, possível e determinado ou possível e indeterminado, resolvendo-o sempre que possível.

2.2.

Como os pivôs da matriz reduzida são os coeficientes α (na 2.ª linha) e $2-\alpha$ (na 3.ª linha), apenas os valores que anulam estes pivôs, ou seja, $\alpha=0$ e $\alpha=2$, alteram a estrutura do sistema.

Partindo da matriz reduzida geral obtida $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \beta-3\alpha+8 \end{array}\right]$, irei analisar separadamente os casos de $\alpha=2$, $\alpha=0$ e $\alpha\neq0\wedge\alpha\neq2$.

$$\xrightarrow[\alpha=2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \xrightarrow[\beta\neq-2]{} Impossível \\ \xrightarrow[\beta=-2]{} Possível\ Indeterminado \end{array}$$

$$\xrightarrow[\alpha=0]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & \beta+8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \xrightarrow[\beta\neq0]{} Impossível \\ \xrightarrow[\beta=0]{} Possível\ Indeterminado \end{array}$$

O sistema é regular (os pivôs não anulam), pelo que há sempre uma única solução, para qualquer $\beta\in\mathbb{R}$.

$$\xrightarrow[\alpha\neq0\ \wedge\ \alpha\neq2]{} \begin{cases} z=(\beta-3\alpha+8)/(2-\alpha) \\ y=(z-4)/\alpha \\ x=3+y-z \end{cases} \qquad Possível\ Determinado\ (solução\ única)$$

Nos casos $\alpha = 2$ e $\alpha = 0$, a matriz reduzida sofre alterações significativas, pelo que apresento as matrizes correspondentes. Já para $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$, a matriz mantém a sua forma regular e o sistema é sempre possível e determinado (solução única), não havendo necessidade de apresentar nova matriz.

3. Enunciado:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} |\cdots| + 0(-1)^{1+4} |\cdots| =$$

3.1.

Está a ser calculado o determinante da matriz quadrada de ordem 4 utilizando o desenvolvimento de Laplace pela primeira linha.

Cuja fórmula geral é:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1J})$$

3.2.

Matriz inicial:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Desenvolvimento pela primeira linha (5, 6, 0, 0):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1J}) = 5(-1)^{1+1} \det(M_{11}) + 6(-1)^{1+2} \det(M_{12}) + 0 + 0$$

Calculando sinais:

$(-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$

$(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$

Logo:

$\det(A) = 5\det(M_{11}) - 6\det(M_{12})$

Os menores são:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Cálculo de $\det(M_{11})$, desenvolvimento pela primeira linha (5, 6, 0):

$$\det(M_{11}) = \sum_{j=1}^{3} (M_{11})_{1j}(-1)^{1+j} \det(N_{1j}) = 5(-1)^{1+1} \det(N_{11}) + 6(-1)^{1+2} \det(N_{12}) + 0$$

Calculando sinais:

$(-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$

$(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$

Logo:

$\det(M_{11}) = 5 \det(N_{11}) - 6 \det(N_{12})$

Os menores são:

$N_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\,.\,5 - 6\,.\,1 = 25 - 6 = 19$

$N_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\,.\,5 - 6\,.\,0 = 5$

Então:

$\det(M_{11}) = 5 \det(N_{11}) - 6 \det(N_{12}) = 5\,.\;19 - 6\,.\;5 = 95 - 30 = 65$

Cálculo de $\det(M_{12})$, desenvolvimento pela primeira coluna (1, 0, 0):

$$\det(M_{12}) = \sum_{i=1}^{3} (M_{12})_{i1}(-1)^{i+1} \det(N_{i1}) = 1(-1)^{1+1} \det(N_{11}) + 0 + 0$$

Calculando sinais:

$(-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$

Logo:

$\det(M_{12}) = 1 \det(N_{11})$

Os menores são:

$N_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\,.\,5 - 6\,.\,1 = 25 - 6 = 19$

Então:

$\det(M_{12}) = 1 \det(N_{11}) = 1\,.\,19 = 19$

Conclui-se, assim, que o determinante da matriz A é:

$\det(A) = 5 \det(M_{11}) - 6 \det(M_{12}) = 5\,.\,65 - 6\,.\,19 = 325 - 114 = 211$

4. Enunciado:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}, y =$$

4.1.

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 4, \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Utilizado a Regra de Cramer, calcule os valores de x, y, z através dos determinantes das matrizes associadas.

4.2.

Pela Regra de Cramer, cada incógnita é dada pelo quociente entre o determinante da matriz obtida substituindo a coluna correspondente pelo vetor dos termos independentes e o determinante da matriz dos coeficientes.

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} \qquad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(3\,.\,1 - 2\,.\,2) - 2(2\,.\,1 - 2\,.\,3) + 3(2\,.\,2 - 3\,.\,3)$$

$$= 1(3 - 4) - 2(2 - 6) + 3(4 - 9) = -1 - 2(-4) + 3(-5) = -1 + 8 - 15 = -8$$

Portanto $\det(A) = -8 \neq 0$, sistema possível e determinado (solução única).

$$A_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_x) = 4\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} = 4(3\,.\,1 - 2\,.\,2) - 4(2\,.\,1 - 3\,.\,2) + 4(2\,.\,2 - 3\,.\,3)$$
$$= 4(3-4) - 4(2-6) + 4(4-9) = 4(-1) - 4(-4) + 4(-5) = -4 + 16 - 20 = -8$$

$$A_y = \begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 4 & 2\\3 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$\det(A_y) = 4\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix} = 4(2\,.\,1 - 2\,.\,3) - 4(1\,.\,1 - 3\,.\,3) + 4(1\,.\,2 - 3\,.\,2)$$
$$= 4(2-6) - 4(1-9) + 4(2-6) = 4(-4) - 4(-8) + 4(-4) = -16 + 32 - 16 = 0$$

$$A_z = \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 3 & 4\\3 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\det(A_z) = 4\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} = 4(2\,.\,2 - 3\,.\,3) - 4\,(1\,.\,2 - 2\,.\,3) + 4(1\,.\,3 - 2\,.\,2)$$
$$= 4(4-9) - 4(2-6) + 4(3-4) = 4(-5) - 4(-4) + 4(-1) = -20 + 16 - 4 = -8$$

Então:

$$x = \left|\frac{\begin{matrix}4 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\4 & 2 & 1\end{matrix}}{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 2\\3 & 2 & 1\end{matrix}}\right| = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-8}{-8} = 1 \qquad y = \left|\frac{\begin{matrix}1 & 4 & 3\\2 & 4 & 2\\3 & 4 & 1\end{matrix}}{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 2\\3 & 2 & 1\end{matrix}}\right| = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{0}{-8} = 0 \qquad z = \left|\frac{\begin{matrix}1 & 2 & 4\\2 & 3 & 4\\3 & 2 & 4\end{matrix}}{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 2\\3 & 2 & 1\end{matrix}}\right| = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Como $\det(A) = -8 \neq 0$, o sistema é possível e determinado e conforme demonstrado através da Regra de Cramer, obtém-se:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = 1 \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = 0 \qquad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = 1$$

Logo, a solução do sistema é $(x, y, z) = (1,0,1)$.

5. Enunciado:

$Seja\ U = \langle(1,2,3),(2,3,4),(3,2,1)\rangle\ , V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + 3y + 9z = 0\}, e\ b = (1,3,6)$

5.1.

Irei chamar de:

$u_1 = (1,2,3)$ $u_2 = (2,3,4)$ $u_3 = (3,2,1)$

Queremos saber se existem $a, b, c \in \mathbb{R}\ tais\ que$:

$au_1 + bu_2 + cu_3 = (1,3,6)$

Isto é:

$a(1,2,3) + b(2,3,4) + c(3,2,1) = (1,3,6)$

Igualando coordenadas, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 1 \\ 2a + 3b + 2c = 3 \\ 3a + 4b + c = 6 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2-2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-3l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A última linha corresponde à equação:

$0a + 0b + 0c = 1 \iff 0 = 1$, que é impossível.

Logo o sistema é incompatível e, portanto $b = (1,3,6)$ não é combinação linear de $(1,2,3), (2,3,4), (3,2,1)$.

5.2.

Temos que:

$U = \langle(1,2,3),(2,3,4),(3,2,1)\rangle$

Irei chamar de:

$u_1 = (1,2,3)$ $u_2 = (2,3,4)$ $u_3 = (3,2,1)$

Na alínea 5.1 chegamos a matriz:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, e após escalonar obtivemos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Esta matriz tem duas linhas não nulas, logo

$rank(A) = 2$

Isto significa que os três vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente dependentes e que o subespaço U tem dimensão:

$\dim U = 2$

Como as duas primeiras colunas correspondem a pivots, podemos tomar

$B_U = \{u_1, u_2\} = \{(1,2,3), (2,3,4)\}$, como base de U.

Queremos agora encontrar um vetor de $\mathbb{R}^3$ que não pertença a U, para juntar a B_U.

Consideremos, por exemplo o vetor $v_1 = (1,0,0)$.

Supomos que $v_1 \in U$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$\alpha u_1 + \beta u_2 = v_1$

Transformando em sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2\beta \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2\beta \\ 2(1-2\beta) + 3\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2(2) \Leftrightarrow \alpha = -3 \\ 2(1-2\beta) + 3\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2(2) \Leftrightarrow \alpha = -3 \\ 2(1-2\beta) + 3\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \\ 3(-3) + 4(2) = 0 \Leftrightarrow -1 = 0 \end{cases}$$

Obtemos uma contradição pois $-1 \neq 0$, portanto o sistema não tem solução e $v_1 = (1,0,0) \notin U$. Assim o conjunto $B = \{u_1, u_2, v_1\} = \{(1,2,3), (2,3,4), (1,0,0)\}$ é formado por uma base de $U : (1,2,3), (2,3,4)$, mais um vetor $v_1 = (1,0,0)$ que não está em U. Logo B é linearmente independente e tem 3 vetores em $\mathbb{R}^3$, pelo que é uma base de $\mathbb{R}^3$.

5.3.

Na alínea 5.2 sabemos que uma base de U é:

$B_U = \{u_1, u_2\} = \{(1,2,3), (2,3,4)\}$,

Logo, qualquer vetor de U pode ser escrito como:

$v_{(a,b)} = au_1 + bu_2$, onde $a, b \in \mathbb{R}$

Isto resulta em:

$v_{(a,b)} = a(1,2,3) + b(2,3,4) = (a + 2b, 2a + 3b, 3a + 4b)$

Portanto, um vetor de U tem a forma de:

$(x, y, z) = (a + 2b, 2a + 3b, 3a + 4b)$

Para pertencer a V tem de satisfazer:

$2x + 3y + 9z = 0$

Substituindo x, y, z:

$$2(a + 2b) + 3(2a + 3b) + 9(3a + 4b) = 0 \Leftrightarrow 2a + 4b + 6a + 9b + 27a + 36b = 0 \Leftrightarrow 35a + 49b$$
$$= 0 \Leftrightarrow 5a + 7b = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{5}b$$

Tomamos, por conveniência que, $b = 5t$ (para eliminar o denominador) e parametrizar o vetor assim ficamos com:

$a = -\frac{7}{5}5t = a = -7t$ $\qquad$ $b = 5t$

Logo, um vetor de $U \cap \mathrm{V}$ é:

$v_{(a,b)} = v_{(-7t,5t)} = -7tu_1 + 5tu_2 = t(-7u_1 + 5u_2)$

Cálculo auxiliar de $-7u_1 + 5u_2$

$-7(1,2,3) + 5(2,3,4) = (-7, -14, -21) + (10, 15, 20) = (3,1,-1)$

Portanto,

$v_{(a,b)} = t(3,1,-1),\ \ t \in \mathbb{R}$

$U \cap \mathrm{V} = \{t(3,1,-1): t \in \mathbb{R}\}$, logo $U \cap \mathrm{V}$ é um subespaço de dimensão 1, e uma base de $U \cap \mathrm{V}$ é por exemplo {(3,1,-1)}

5.4.

Sabemos das alíneas anteriores que:

$B_U = \{u_1, u_2\} = \{(1,2,3), (2,3,4)\}$, logo como B_U tem dois vetores

$\dim(B) = 2$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 9z = 0\}$, é o conjunto de soluções de uma equação linear não trivial em $\mathbb{R}^3$, portanto

$dim\ (V) = 3 - 1 = 2$

Na alínea anterior obtivemos que:

$\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \{t(3,1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$ logo

$\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) = 1$

Usando a fórmula das dimensões:

$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3$

Como $U + V$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e tem dimensão 3 concluímos que:

$U + V = \mathbb{R}^3$