Elementos de Probabilidades e Estatística (21037)

11 junho 2018

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Como existem 6 faces em cada dado e os dados são equilibrados, temos $6 \times 6 = 36$ possiveis resultados com igual probabilidade $(= 1/36)$. A seguinte tabela mostra o espaço de resultados:

Faces	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

1.1 `(1 valor)`

Sejam:
A- o evento de obter um duplo no lançamento dos dados;
B - o evento de obter 7 no lançamento dos dados;
(25% cotação)
No mesmo lançamento, estes dois eventos são mutamente exclusivos: $P(A \cap B) = 0$.
Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) =$$

(50% cotação)

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} = \frac{12}{36} = 0.33(3)$$

(25% cotação)

1.2 `(1 valor)`

Sejam:
A - o evento de obter um 5 no primeiro dado;
B - o evento de obter um 5 no segundo;
(25% cotação)
Estes dois eventos não são mutuamente exclusivos, porque existe um resultado comum (5 em ambos os dados), que ocorre com probabilidade 1/36

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

(50% cotação)

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} = 0.305(5)$$

(25% cotação)

1.3 `(1.25 valores)`

Sejam:

A - o evento de não obter um duplo no lançamento dos dados;

B - o evento de obter 8 no lançamento dos dados;

(25% cotação)

Estes dois eventos não são mutuamente exclusivos, porque existem 4 resultados em qua a soma é 8 e não são duplos.

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 6/36 = 30/36$, pois a probabilidade de obter duplos foi calculada na alínea 1.1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

(50% cotação)

$$= \frac{30}{36} + \frac{5}{36} - \frac{4}{36} = \frac{31}{36} = 0.861(1)$$

(25% cotação)

1.4 `(1.25 valores)`

Sejam:

A - o evento de obter um duplo no lançamento dos dados;

B - o evento de obter 8 no lançamento dos dados;

(25% cotação)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$$

(50% cotação)

$$= \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6} = 0.16(6)$$

(25% cotação)

2. Seja $X =$ a v.a. quantidade de CO_2, expressa em hg/km, emitida por um automóvel de determinado modelo.

2.1 `(3 valores)`

Por definição, temos

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in \Re$$

(20% cotação)
Assim,
• se $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

(20% cotação)
• se $0 \leq x < 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{-\infty}^{x} tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

(20% cotação)
• se $1 \leq x < 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{1}^{x} (2-t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 +$$

$$+ \left[-\frac{(2-t)^2}{2}\right]_1^x = 1 - \frac{(2-x)^2}{2}$$

(20% cotação)
• se $x \geq 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{1}^{2} (2-t)dt + \int_{2}^{x} 0dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 +$$

$$+ \left[-\frac{(2-t)^2}{2}\right]_1^2 = 1$$

(20% cotação)
A função de distribuição de X é então dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

2.2 `(2 valores)`
Sendo X uma v.a. real contínua, o terceiro quartil de X é todo o número real, Q_3, quer verifica $F(Q_3) = \frac{3}{4} = 0.75$. *(30% cotação)*
Sendo F contínua, não decrescente, $F(1) = \frac{1}{2}$ e $F(2) = 1$, constatamos que $Q_3 \in \,]1; 2[$. Ora

$$1 - \frac{(2-x)^2}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(30% cotação)
Como apenas $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \in \,]\,1;2\,[$, concluímos que $Q_3 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Assim

$$P\left(X \leq 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

isto é, 75% dos automóveis do referido modelo emitem quando muito $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ hg/km de CO_2. *(40% cotação)*

2.3 `(1.5 valores)`
Tem-se

$$P\left(X > 1.5 | X > 1\right) =$$

(25% cotação)

$$= \frac{P\left((X > 1.5) \cap (X > 1)\right)}{P(X > 1)} =$$

(25% cotação)

$$= \frac{P(X > 1.5)}{P(X > 1)} = \frac{1 - F(1.5)}{1 - F(1)} =$$

(25% cotação)

$$= \frac{1}{4}$$

pois $F(1) = \frac{1}{2}$ e $F(1.5) = 1 - \frac{(2-1.5)^2}{2} = \frac{7}{8}$. *(25% cotação)*

2.4 `(1.5 valores)`
Sabendo que $f(x) = 0$ para $x \notin \,]\,0;2\,]$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx =$$

(30% cotação)

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx =$$

(30% cotação)

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left[4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right] = 1$$

(40% cotação)

2.5 `(1.5 valores)`

Sabendo que a variância de X é $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, *(10% cotação)*

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx =$$

(30% cotação)

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx =$$

(20% cotação)

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

(10% cotação)

E assim

$$V(X) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6} = 0.16(6)$$

(10% cotação)

consequentemente, o desvio padrão de X é $\sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.408$.

(20% cotação)

3 Seja: A_i o acontecimento "o doente i apresenta o efeito sedundário".

Então $P(A_i) = 0.1, i = 1, 2, \ldots, 8$, pois temos 8 doentes e estes não têm qualquer grau de parentesco (independentes).

Consideremos: X - v.a. que representa o número de doentes, em 8, que apresentam o efeito secundário. Então X segue uma lei Binomial de parâmetros $n = 8$ e $p = 0.1$, tendo-se

$$P(X = k) = \binom{8}{k} 0.1^k 0.9^{8-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$$

3.1 `(1 valor)`

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} 0.1^3 0.9^5$$

(100% cotação)

3.2 `(1 valor)`

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9^8$$

(100% cotação)

3.3 `(1 valor)`

$$P(X \leq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = 0.9^8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0.1^1 0.9^7 +$$

$$+ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} 0.1^2 0.9^6$$

(100% cotação)

3.4 `(1.5 valores)`

Introduzindo a v.a. Y - número de doentes, em 8, que não apresentam o efeito secundário, é agora pedida a $P(Y > 6)$. *(50% cotação)*

Mas $Y = 8 - X$, então

$$P(Y > 6) = P(8-X > 6) = P(X < 2) = P(X=0)+P(X=1) =$$

$$= 0.9^8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0.1^1 0.9^7$$

(50% cotação)

3.5 `(1 valor)`

$$P(Y > X) = P(8 - X > X) =$$

(50% cotação)

$$= P(2X < 4) = P(X < 2) = 0.9^8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0.1^1 0.9^7$$

(50% cotação)

3.6 `(0.5 valores)`

Pede-se $E(X)$. Como $X \sim B(8; 0.1)$, temos $E(X) = np = 8 \times 0.1 = 0.8$ *(100% cotação)*