U.C. 21076

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

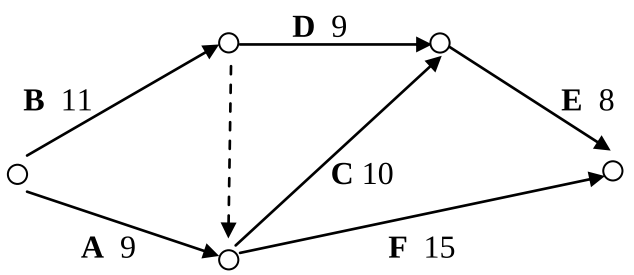
Ano Letivo: 2015/2016

# TESTE FORMATIVO 2

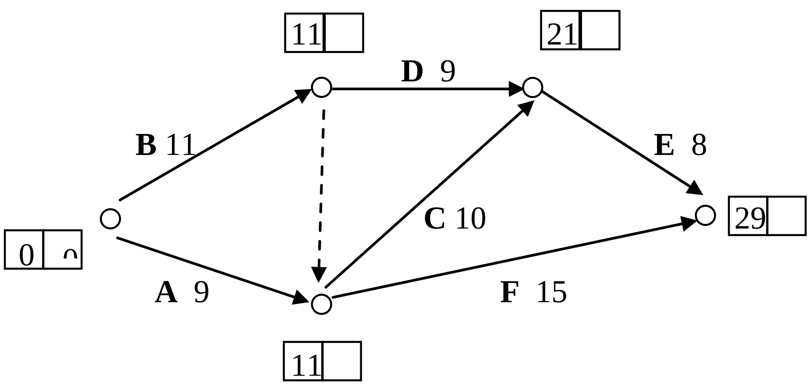
## PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

## I

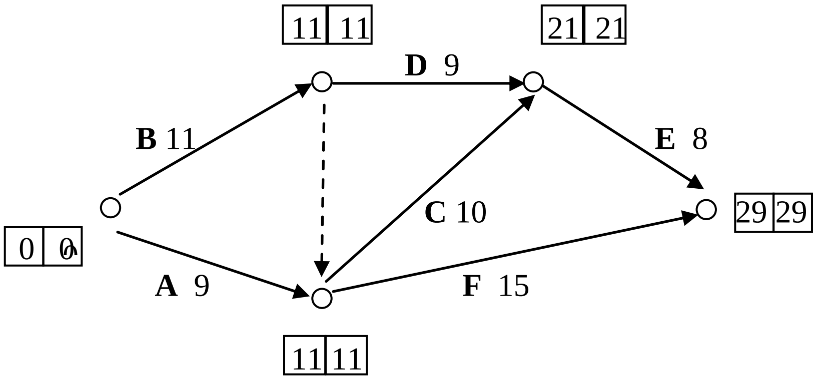
**a)**




**b)**




Depois de determinados os tempos mais cedo, poderemos determinar os tempos mais tarde.




**c)** De notar que, apesar de em todos os nós os tempos mais cedo serem iguais aos tempos mais tarde, tal não significa, obviamente, que todas as actividades são críticas. Apenas as actividades B, C e E respeitam a outra condição necessária (duração igual à diferença entre os tempos do nó de destino e de origem). Assim, o caminho crítico deste empreendimento é formado pelas actividades B, C e E.

**d)**

**d.1)** DurTot ~ Máx { Dur(B)+Dur(D)+Dur(E) ; Dur(B)+Dur(C)+Dur(E); Dur(A)+Dur(C)+Dur(E) ; Dur(A)+Dur(F) }

**d.2)** $DurTot_{PERT}$ ~ Dur(C.C.M.) ~ Dur(B)+Dur(C)+Dur(E) ~ N (μ; σ) , com μ = 29 semanas e $\sigma = \sqrt{(1{,}1)^2 + (1{,}0)^2 + (0{,}8)^2} = \sqrt{2{,}85} = 1{,}688$ semana

**d.3)** $P(DTot > 31) = 1 - P(DTot \le 31) = 1 - \Phi\left(\frac{31-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1{,}18) =$

$= 1 - 0{,}8810 = 0{,}1190 = 11{,}90\ \%$

(valor retirado da tabela da função de distribuição acumulada da distribuição Normal Reduzida).

Assim, a probabilidade pedida é de 11, 90 %..

**d.4)** $P(DTot \le 26) = P(DTot \le 26) = \Phi\left(\frac{26-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-1{,}78) = 0{,}0375 =$

$= 3{,}75\ \%$

(valor retirado da tabela da função de distribuição acumulada da distribuição Normal Reduzida).

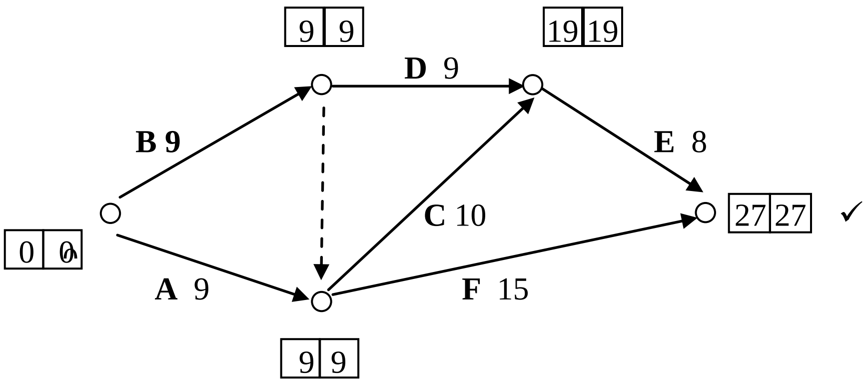
Assim, a probabilidade pedida é de 3,75 %..

**d.5)** E [ Lucro ] = 1000 – 10 . 29 – 500 . P (DTot > 31 ) + 200 . P (DTot ≤ 26 ) =
= 1000 – 290 – 500 . 0,1190 + 200 . 0,0375 =
= 658,00 u.m.

**e)** Como o caminho crítico inicial é constituído pelas actividades B, C e E, escolher-se-ia inicialmente uma destas actividades para se efectuar a primeira redução.

| Actividade | Red.Máx. | C.U.R. |
|---|---|---|
| A | 2 | 4 |
| B | 3 | 3 |
| C | 1 | 5 |
| D | --- | --- |
| E | 2 | 7 |
| F | 1 | 8 |

De entre estas actividades, a actividade B é a de custo unitário de redução mais baixo, podendo a sua duração ser reduzida até 3 semanas. No entanto, é fácil ver que **a redução máxima que se deve efectuar inicialmente é de 2 semanas na duração da actividade B, com um custo total de 6 u.m.**. (uma 3ª semana reduzida em B não traria qualquer vantagem, dado que a actividade A – que decorre em “paralelo” - tem duração igual a 9 semanas).



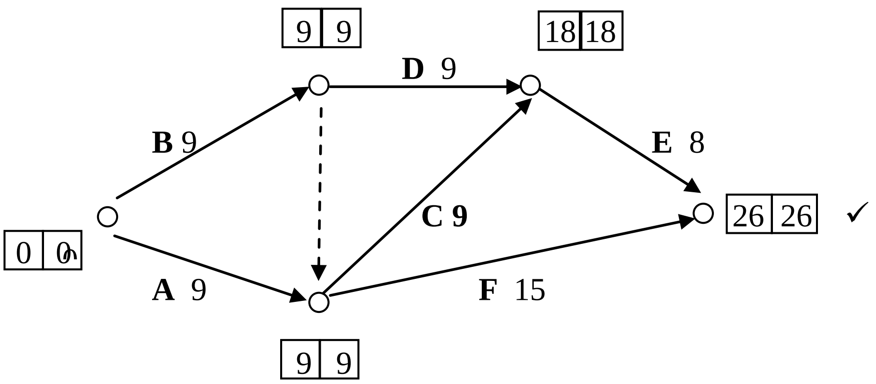

**f)** O caminho crítico agora passará a ser constituído pelas actividades A, B, C e E. Com efeito, a diferença entre os tempos dos nós de destino e de origem é igual à duração da actividade A, que passa a ser crítica.

**g)** Para se efectuar uma segunda redução, ter-se-ia que se considerar o novo caminho crítico. Assim, poder-se-ia reduzir, simultaneamente as durações das actividades A e B, ou reduzir apenas a duração de C, ou reduzir a duração de E.

As actividades A e B só poderiam sofrer uma redução simultânea de 1 semana, a um custo unitário de 4 + 3 = 7 u.m./semana. A actividade C poderia ser reduzida de 1 semana, com um custo unitário de redução de 5 u.m./semana. A actividade E poderia ser reduzida de 2 semanas com um custo unitário de redução de 8 u.m./semana.

| Actividade | Red.Máx. | C.U.R. |
|---|---|---|
| A | 2 | **4** |
| B | **1** | **3** |
| C | **1** | **5** |
| D | --- | --- |
| E | **2** | **8** |
| F | 1 | 8 |

Assim, **a segunda redução de duração deveria ser efectuada na actividade C (1 semana; custo = 5 u.m.)**.




**II**

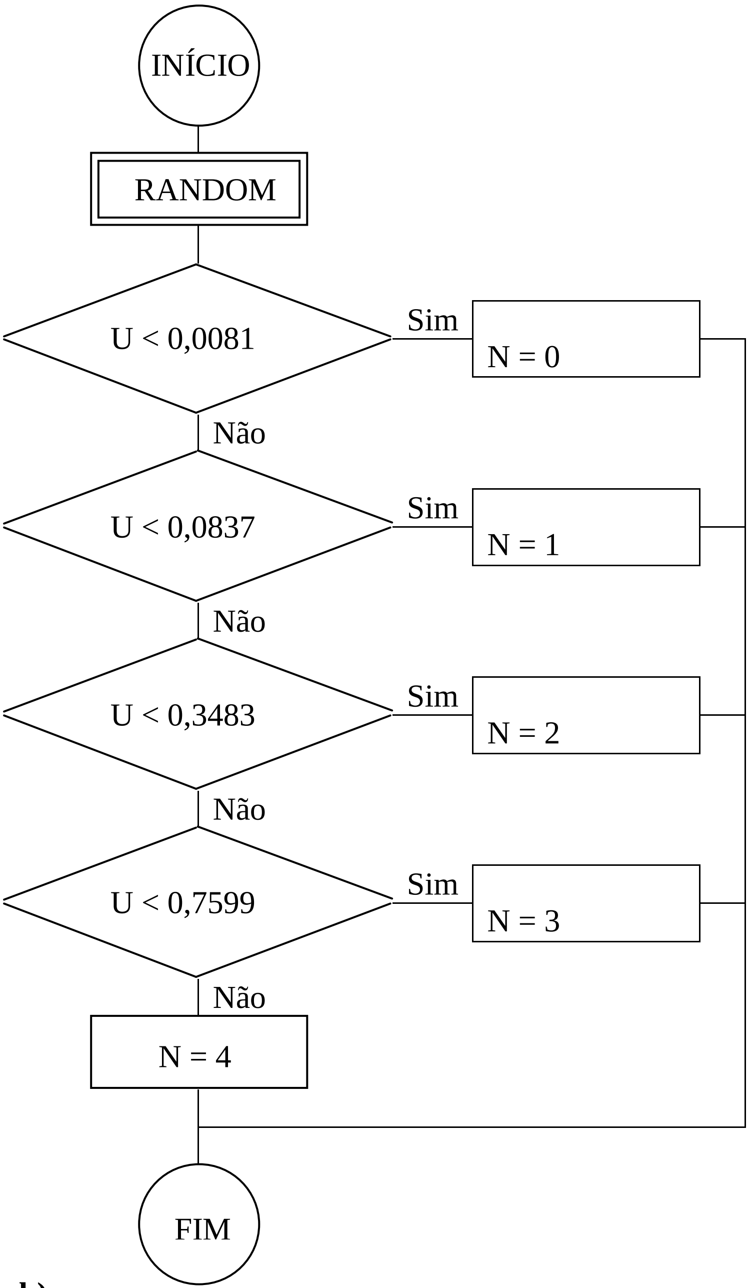
**a)** N ~ Bin ( n = 4 ; p = 0,7 )
Se X ~ Bin(n;p), então P( X = k ) = $C^n_k \cdot p^k \cdot (1\text{-}p)^{n\text{-}k}$ , k = 0, 1, 2, …, n. $C^n_k$ = n! / [ k! . (n-k)! ]

| **k** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P ( X = k )** | 0,0081 | 0,0756 | 0,2646 | 0,4116 | 0,2401 |
| **P ( X ≤ k )** | 0,0081 | 0,0837 | 0,3483 | 0,7599 | 1,0000 |

Assim, geramos um NPA U[0;1] → u. Se $u$ < 0,0081, então $n_1$ = 0; caso contrário, se $u$ < 0,0837, $n$ = 1; caso contrário, se $u$ < 0,3483, $n$ = 2; caso contrário, se $u$< 0,7599, $n$ =3; caso contrário, $n$ = 4.

Na página seguinte esboça-se um fluxograma desta rotina.

**Rotina NUM**




**b)**

**b.1)** Comecemos por determinar a função de densidade de probabilidade (nula fora do intervalo [15; 115]:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}0004x - 0{,}0060 & ; x \in [15;65] \\ -0{,}0004x + 0{,}0460 & ; x \in [65;115] \end{cases}$$

Em seguida, determinamos, por (cuidadosa) integração, a função de distribuição acumulada:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x<15 \\ 0{,}0002x^2-0{,}0060x+0{,}0450 & ; \quad x\in[15;65] \\ -0{,}0002x^2+0{,}0460x-1{,}645 & ; \quad x\in[65;115] \\ 1 & ; \quad x>115 \end{cases}$$

Verifiquemos que $F_X(15) = 0$ ✓; $F_X(65) = 0{,}5$ (em ambas as expressões) ✓✓e que $F_X(115) = 1$ ✓.

Assim, geramos um NPA U[0;1] $\rightarrow u$.
Se $u < 0{,}5$, então $u = 0{,}0002x^2-0{,}0060x+0{,}0450$, ou seja, $x = 15+25\sqrt{8u}$; caso contrário, $u = -0{,}0002x^2+0{,}0460x-1{,}645$, ou seja, $x = 115-25\sqrt{8-8u}$.

(Não consideramos relevante a apresentação do fluxograma correspondente a esta rotina).

**b.2)** Geração utilizando o Método da Rejeição:

Por análise da função de densidade de probabilidade

$$f_X(x)=\begin{cases} 0{,}0004x-0{,}0060 & ; x\in[15;65] \\ -0{,}0004x+0{,}0460 & ; x\in[65;115] \end{cases},$$

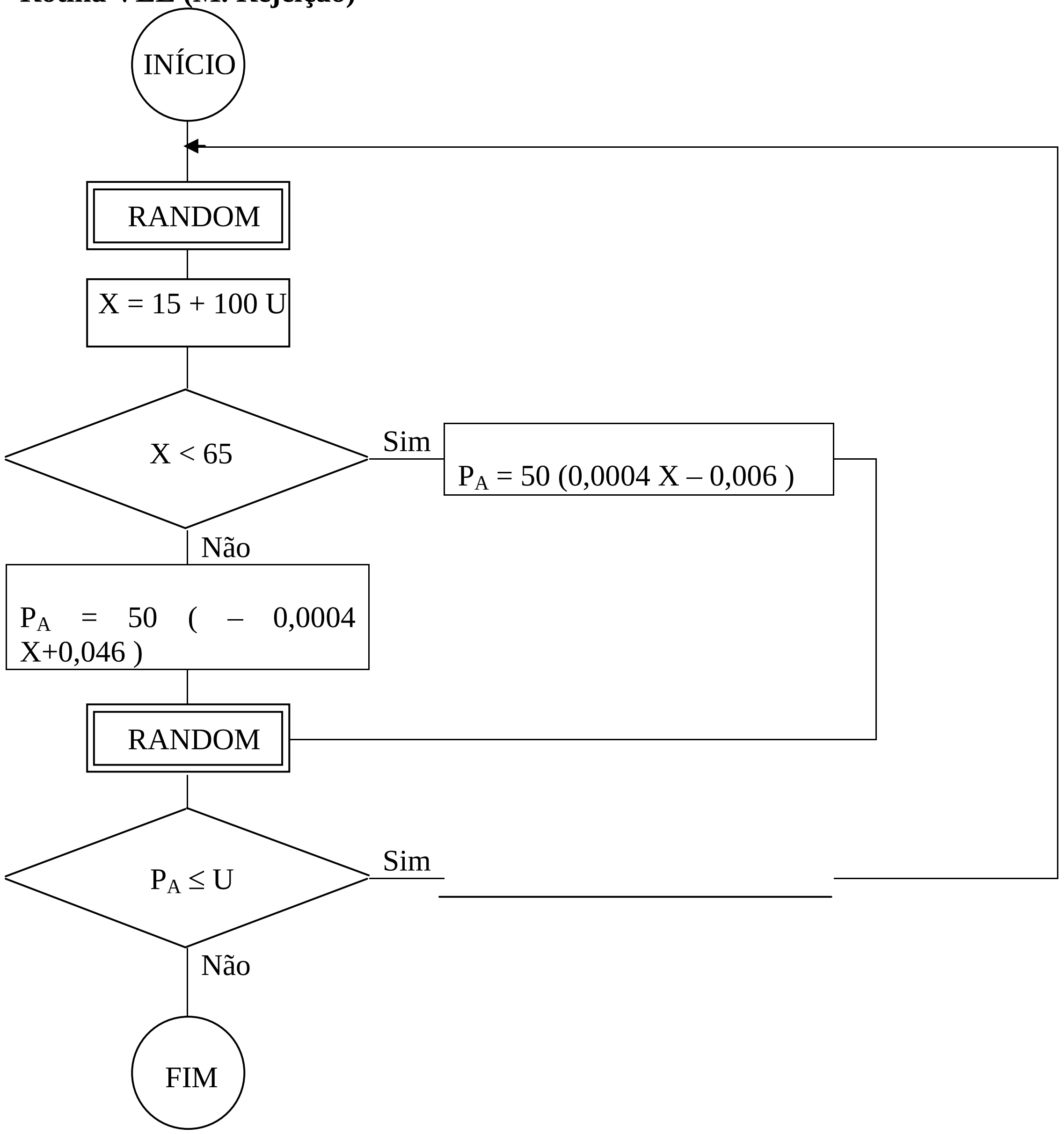
podemos constatar que a Moda corresponde a x = 65 e $f_X(65)=0{,}02$.

Assim,
1) Geramos um NPA U[0;1] $\rightarrow u_1$.
2) Determinamos $x_1 = 15 + 100\, u_1$.
3) Determinamos $f_X(x_1)$ e $P_A = \dfrac{f_X(x_1)}{0{,}02} = 50 f_X(x_1)$

   (De notar que $P_A \in [0;1]$).
4) Geramos um NPA U[0;1] $\rightarrow u_2$.
5) Se $P_A \leq u_2$, então rejeitamos $x_1$ e retornamos a 1); caso contrário, aceitamos $x_1$ como NPA X.

Na página seguinte apresentamos um esboço do fluxograma desta versão da rotina REC (uma versão, mais "complicada", mas menos eficiente, do que a obtida com o Método da Inversão).

**Rotina VEL (M. Rejeição)**




**b.3)** Sabendo que se U1 e U2 são v.a. i.i.d. Unif[0;1], então U1 + U2 ~ Triang [0 ; 2], poderemos fazer uma rotina que, muito facilmente, nos permite gerar a distribuição "Triangular[15;115]", que caracteriza a velocidade de uma rajada:

1) Geramos um primeiro NPA U[0;1] $\rightarrow \boldsymbol{u_1}$.
2) Geramos um segundo NPA U[0;1] $\rightarrow \boldsymbol{u_2}$.
3) Somamos os dois valores : $x_1 = u_1 + u_2$.
4) Fazemos a "mudança de escala": queremos passar de um triângulo de base 2 para um triângulo de base 100 – para tal, basta multiplicarmos o valor por 50, isto é, $x_2 = 50\ x_1 =$

$50\ ( u_1 + u_2 )$. Mas, note-se, este valor pertence à escala [0;100], e não [15;115]... Ou seja, bastará adicionar 15: $x_3 = x_2 + 15 = 50\ ( u_1 + u_2 ) + 15$. Assim, bastará fazer-se $\boldsymbol{x = 15 + 50\ ( u_1 + u_2 )}$. E é só !

(Não consideramos relevante a apresentação do fluxograma correspondente a esta rotina).

**c)** Se o processo de ocorrência das rajadas é Poissoniano, com taxa média de 1 rajada por hora, o intervalo de tempo médio entre duas chegadas consecutivas será de 1 hora. Ora, esse intervalo de tempo é caracterizado por uma variável Exponencial e se $X \sim Exp\ (\lambda)$,então $\mu_X = 1/\lambda$ e $f_X(x) = \lambda\ .e^{-\lambda.x}$ , $x > 0$.

Assim, se assumirmos que a unidade de tempo é a hora, $\mu_{DT} = 1/\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=1$.
A geração de um NPA com distribuição Exponencial ($\lambda$) faz-se facilmente, pelo Método da Inversão – **rotina GeraDT**:

1) Geramos um NPA U[0;1] $\rightarrow$ ***u***;
2) Determinamos **dt** $= -1/\lambda\ .\ \ln (\boldsymbol{u}) = -\ \ln (\boldsymbol{u})$ (com dt em horas). E é só !

(Por razões óbvias, não consideramos relevante a apresentação do fluxograma correspondente a esta rotina).

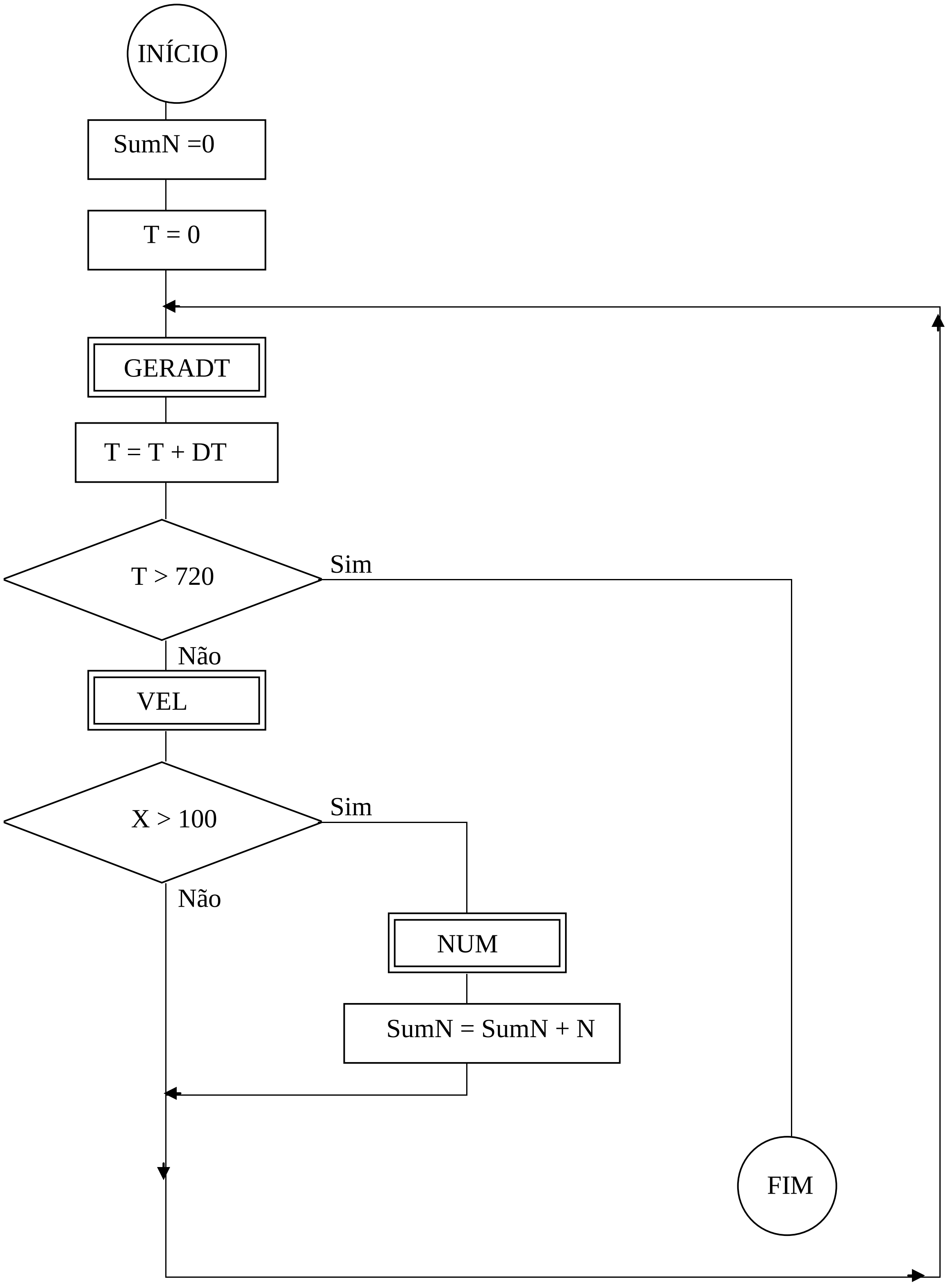
**d)** nº horas em 1 mês = 30 . 24 = 720 horas.

Explicitemos então a **rotina NUMMES**:
1) SumN = 0 (SumN: Somatório do nº chamadas) ; T = 0 (T: Tempo)
2) **GeraDT** $\rightarrow$ dt (geração do intervalo de tempo até à próxima rajada);
3) T = T + dt (avanço do relógio);
4) Se T > 720, fim (a variável SumN terá o nº chamadas no mês), caso contrário $\rightarrow$ 5)
5) (Processar a ocorrência de nova rajada):
5.1) **VEL** $\rightarrow$ X (geração da velocidade da rajada);
5.2) Se X > 100, então
5.2.1) **NUM** $\rightarrow$ N
5.2.2) SumN = SumN + N

5.3) Vai para 2) (final do processamento da rajada; geração de, eventual, nova rajada).

Na página seguinte apresentaremos um esboço desta rotina.

**Rotina NUMMES**




**FIM**