U.C. 21048

Física Geral

22 de julho de 2015 – RESOLUÇÃO

INSTRUÇÕES

Leia com atenção o que se segue antes de iniciar a sua prova:

Verifique se o enunciado desta prova possui, para além desta folha de rosto, mais 5 páginas, numeradas de 2 a 6 e terminando com a palavra FIM.

O estudante não necessita de indicar qualquer resposta neste enunciado, pelo que poderá ficar na posse do mesmo finda a prova.

Este exame consta de duas partes:

1) A primeira é constituída por **6 questões de escolha múltipla**, em que apenas uma das respostas é correcta. **As respostas a estas questões devem ser feitas na folha de prova** (não neste enunciado). Indique de uma forma clara a alínea que corresponde à resposta que considera correta. Respostas que não sejam claras ou cuja interpretação seja ambígua serão consideradas **nulas**. Se desejar, pode incluir detalhes da sua resolução da questão. Se desses detalhes o professor verificar que respostas incorretas se deveram apenas a pequenos erros de cálculo, estas poderão ser parcialmente cotadas.
2) A segunda é composta por **4 questões estruturadas** de produção de resposta. Nestas respostas os parâmetros valorizados são:
   - O rigor científico do raciocínio usado, nomeadamente na identificação dos princípios físicos em jogo e na colocação do problema em equação.
   - O rigor dos cálculos efectuados, incluindo a expressão correta dos resultados (os valores numéricos com os algarismos significativos e unidades adequados) e a interpretação dos resultados (se aplicável). Os resultados devem ser apresentados com 2 ou 3 algarismos significativos.
   - A questão 4 está cotada entre 3 e 5 valores, conforme a complexidade dos cálculos e método numérico apresentados. A soma desta questão com as restantes é truncada a 20 valores.

Recomenda-se que:

- Leia com muita atenção as questões e selecione bem os dados e incógnitas antes de responder.
- Responda primeiro às questões que julgar mais acessíveis, e só depois às questões que considerar mais difíceis.
- Revejaas resoluções cuidadosamente antes de entregar a prova.

Pode utilizar a sua máquina de calcular mas não pode emprestá-la a qualquer dos seus colegas.

Duração: 2h:30 min

FORMULÁRIO E VALORES DE CONSTANTES FÍSICAS

$\Delta G = G_{final} - G_{inicial}$; $\vec{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \mathbf{J} + A_z \mathbf{K}$; $|\vec{A}| \equiv A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$; $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$; $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \hat{\mathbf{n}}$

Círculo: $A = \pi R^2$; $P = 2\pi R$ | Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $A = 4\pi R^2$ | Cilindro: $V = \pi R^2 h$; $A = 2\pi R^2 + 2\pi R h$

$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $s_{med} = \frac{distância}{\Delta t}$; $s = |\vec{v}| = v$; $\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$; $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$\begin{cases} \vec{v} = cte \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \end{cases}$ 1D: $\begin{cases} v = cte \\ x = x_0 + vt \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \vec{a} = cte \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$ 1D: $\begin{cases} a = cte \\ v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \theta = \frac{d}{R} \quad ; \quad 1\text{ rot} = 2\pi \text{ rad} \\ \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad \omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad ; \quad \alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \end{cases}$; $\begin{cases} d = \Delta\theta R \\ v = \omega R \\ a_t = \alpha R \quad ; \quad a_r = \frac{v^2}{R} \end{cases}$; $\begin{cases} \omega = cte \\ \theta = \theta_0 + \omega t \end{cases}$; $\begin{cases} \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \\ \alpha = \frac{|\Sigma \vec{\tau}|}{I} \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha = cte \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$; $F_g = mg$; $g = 9{,}8$ m/s^2 ; $f_s \le \mu_e F_N$; $f_k = \mu_c F_N$; $F_{centrip} = m\frac{v^2}{R}$

$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$; $E_c = \frac{1}{2}mv^2$; $E_p = -\int_{xi}^{xf} F_C(x)dx$; $F_C = -\frac{dE_p}{dx}$; $E_{pg} = mgh$; $F_{elast,x} = -kx$; $E_{p,elast} = \frac{1}{2}kx^2$

$E_m = E_c + E_p$; $W_{tot} = \Delta E_c$; $W_C = -\Delta E_p$; $W_{NC} = \Delta E_m$; $\mathcal{P}_{med} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$; $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$\vec{p} = m\vec{v}$; $\vec{I} = \vec{F}_{ext}\Delta t$; $\vec{I} = \Delta\vec{p}$

$F_G = G\frac{Mm}{r^2}$; $V_G = -G\frac{M}{r}$; $E_{pG} = mV_G$; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ; $a_g \equiv g = G\frac{M}{r^2}$

Para uma ED do tipo $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$

Euler/Runge-Kutta 1: $x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h$; $h = t_{i+1} - t_i$

Heun/Previsor-corretor/Runge-Kutta 2: $\begin{cases} x_{i+1}^{(P)} = x_i + f(t_i, x_i)h \\ x_{i+1} = x_i + \frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(P)})}{2}h \end{cases}$; $h = t_{i+1} - t_i$

Nota: x_i, x_{i+1} são o mesmo que respetivamente $x(t_i)$, $x(t_{i+1})$.

PARTE I

1. **(1,5 val)** Um avião Boeing 747 percorre 1100 m de pista em aceleração constante até descolar, 25,0 s depois do arranque. Qual a rapidez com que descola, em km/h?

A. 44 km/h **B.** 88 km/h **C.** 158 km/h **D.** 317 km/h **E.** 425 km/h **F.** 570 km/h

Trata-se de uma situação de MRUV. Da expressão $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ podemos achar a aceleração. Se repararmos bem, aqui $x - x_0 = 1100$ m e $v_0 = 0$. Isto leva a

$$1100\ \mathrm{m} = \frac{1}{2}a(25{,}0\ \mathrm{s})^2 \Leftrightarrow a = 3{,}52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Usando agora $v = v_0 + at$ obtemos a rapidez de descolagem, que é

$$v = \left(3{,}52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(25{,}0\ \mathrm{s}) = 88{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(317\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)$$

2. **(1,5 val)** Uma bola é deixada cair verticalmente de uma altura h, ressaltando no chão e subindo de volta até uma altura $h/3$. Seja V_1 a rapidez da bola à chegada ao solo antes do ressalto e V_2 a rapidez à chegada ao solo quando ela embate neste pela segunda vez. Quanto vale V_1/V_2?

A. 1/2 **B.** 1/3 **C.** 2 **D.** 3 **E.** $1/\sqrt{3}$ **F.** $\sqrt{3}$

No ressalto claramente a energia mecânica não é conservada, mas na queda de desde as alturas máximas (h, $h/3$) até ao solo, é-o. Assim, basta-nos aplicar $\Delta E_m = 0$ para a primeira queda e para a segunda. Fazendo a origem do potencial gravitacional no solo ($E_{pg} = 0$ para $h = 0$) e notando que nas alturas máximas a energia cinética da bola é zero temos:

$$\Delta E_m^{h\to \mathrm{solo}} = 0 \Leftrightarrow E_m(h) = E_m(\mathrm{solo}) \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$\Delta E_m^{h/3\to \mathrm{solo}} = 0 \Leftrightarrow E_m\left(\frac{h}{3}\right) = E_m(\mathrm{solo}) \Leftrightarrow mg\frac{h}{3} = \frac{1}{2}mv_2^2 \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2g\frac{h}{3}}$$

O quociente V_1/V_2 é então

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2g\frac{h}{3}}} = \sqrt{\frac{2gh}{2g\frac{h}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{1/3}} = \sqrt{3}$$

3. (1,5 val) Uma bola A, de 1,5 kg de massa, embate frontal e elasticamente a 2,0 m/s contra uma outra, B, inicialmente em repouso. Seja x a direção do movimento das bolas. Após o embate a velocidade final da bola A é V_{Af} = +0,50 m/s. Quais são a massa da bola B e a sua velocidade final?

A. V_{Bf} = 3,5 m/s ; m_B = 0,90 kg

B. V_{Bf} = 3,5 m/s ; m_B = 0,60 kg

C. V_{Bf} = 2,5 m/s ; m_B = 0,90 kg

D. V_{Bf} = 2,5 m/s ; m_B = 0,60 kg

E. V_{Bf} = 1,5 m/s ; m_B = 0,90 kg

F. V_{Bf} = 1,5 m/s ; m_B = 0,60 kg

Sendo a colisão frontal e elástica, conserva-se, além do momento linear, a energia cinética. Isto dá-nos, segundo a direção do movimento e no SI,

$$\begin{cases} \text{(conservação do momento)} \quad m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \\ \text{(conserv. energia cinética)} \quad \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1{,}5)(2{,}0) + 0 = (1{,}5)(0{,}5) + m_B v_{Bf} \\ \frac{1}{2}(1{,}5)(2{,}0)^2 + 0 = \frac{1}{2}(1{,}5)(0{,}5)^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 \end{cases}$$

A maneira mais simples continuar é obter $m_B v_{Bf}$ e notar que $m_B v_{Bf}^2 = m_B v_{Bf}(v_{Bf})$. Isto permite simplificar as expressões:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}25 = m_B v_{Bf} \\ 3{,}00 - 0{,}1875 = \frac{1}{2} m_B v_{Bf}(v_{Bf}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}25 = m_B v_{Bf} \\ 5{,}625 = 2{,}25 v_{Bf} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_B = \frac{2{,}25}{v_{Bf}} = \frac{2{,}25}{2{,}50} = 0{,}90 \text{ kg} \\ v_{Bf} = \frac{5{,}625}{2{,}25} = 2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

4. (1,0 val) Um automóvel acelera dos 0 aos 20,0 m/s em 4,00 s. As suas rodas têm 56,0 cm de raio. Quantas rotações descrevem as rodas neste movimento?

A. 71 rot **B.** 56 rot **C.** 43 rot **D.** 11 rot **E.** 8,9 rot **F.** 5,0 rot

A aceleração linear é de $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0}{4{,}00 \text{ s}} = 5{,}00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Isto corresponde a uma aceleração angular de

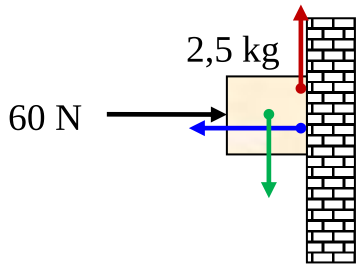
$$a = \alpha r \rightarrow \alpha = \frac{a}{r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5{,}00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}560 \text{ m}} = 8{,}93 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

As rotações descritas são então de (do enunciado $\omega_0 = 0$)

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2}\left(8{,}93 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(4{,}00 \text{ s})^2 = 71{,}44 \text{ rad}$$

Em rotações são (1 rot $= 2\pi$ rad) 11,4 rotações.

5. **(1,0 val)** Um bloco de 2,5 kg de massa encontra-se encostado a uma parede, comprimido contra esta por uma força de 60 N (c.f. figura). Qual o valor mínimo do coeficiente de atrito estático que permite que o sistema se mantenha em equilíbrio?



A. 2,4 **B.** 1,5 **C.** 0,92 **D.** 0,41 **E.** 0,15 **F.** 0,9

Marcando as forças temos, além da força de compressão do enunciado, F, mais três: a normal (azul), o peso (verde) e o atrito estático (vermelho escuro). Para haver equilíbrio o sistema tem de obedecer à primeira lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = 0$. Escolhendo um referencial xy usual temos

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F - F_N = 0 \\ -F_g + f_s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60\ \mathrm{N} - F_N = 0 \\ -mg + f_s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_N = 60\ \mathrm{N} \\ f_s = (2{,}5\ \mathrm{kg})\left(9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 24{,}5\ \mathrm{N} \end{cases}$$

Notando agora que $f_s \leq \mu_s F_N \rightarrow f_s^{max} = \mu_s F_N$ temos que o mínimo valor de μ_s que permite o equilíbrio é

$$f_s^{max} = \mu_s F_N \Leftrightarrow \mu_s = \frac{24{,}5\ \mathrm{N}}{60\ \mathrm{N}} = 0{,}41$$

6. **(1,5 val)** Em Física, denominamos por “oscilador amortecido” um sistema massa-mola com força resistiva proporcional à velocidade. A equação do movimento de um oscilador amortecido é

$$\frac{d^2x}{dt^2} - b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Com x a posição da massa, t o tempo, b e ω constantes relativas a caraterísticas físicas do sistema. Identifique a variável dependente, a variável independente e os parâmetros desta equação diferencial. (Indique na folha de prova quatro respostas.)

x é:

A. A variável dependente

B. A variável independente

C. Um parâmetro

t é:

D. A variável dependente

E. A variável independente

F. Um parâmetro

b é:

G. A variável dependente

H. A variável independente

I. Um parâmetro

ω é:

J. A variável dependente

K. A variável independente

L. Um parâmetro

O que se pretende saber da ED é a posição como função do tempo, i.e. $x(t)$. Assim, a posição x é a variável dependente, o tempo t a variável independente e b e ω são parâmetros.

PARTE II

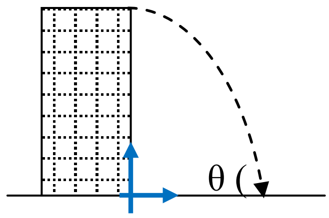
1. Um projétil é lançado horizontalmente, a 2,3 m/s, do topo de um edifício de altura desconhecida. Ao fim de 3,5 s chega ao solo. Tratando o projétil como um corpo aproximadamente pontual,

Calcule:

a. (0,8 val) A distância *d*, medida na horizontal, de desde a borda inferior do edifício até ao local de embate no solo.

b. (0,8 val) A altura *h* do edifício.

c. (1,4 val) O ângulo θ que o vetor velocidade do projétil faz com a horizontal no instante de embate no solo.



(***a***) Segundo a horizontal o movimento de um projétil é um MRU. No referencial *xy* usual que colocámos na figura, este é descrito por

$$x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + \left(2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t$$

Ao fim de 3,5 s o projétil encontra-se em

$$d = \left(2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(3{,}5\ \mathrm{s}) = 8{,}05\ \mathrm{m}\quad (8{,}0\ \mathrm{m})$$

(***b***) Segundo a vertical, um projétil descreve um MRUV. Temos então, novamente no referencial *xy*,

$$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow y = h + 0 - \left(4{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2$$

Como sabemos que a queda, i.e. $y = 0$, se dá ao fim de 3,5 s vem

$$0 = h - \left(4{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3{,}5\ \mathrm{s})^2 \Leftrightarrow h = 60\ \mathrm{m}$$

(***c***) Para determinar θ precisamos das componentes vetor velocidade. Já sabemos a sua componente horizontal, que é 2,3 m/s (enunciado). A componente vertical é

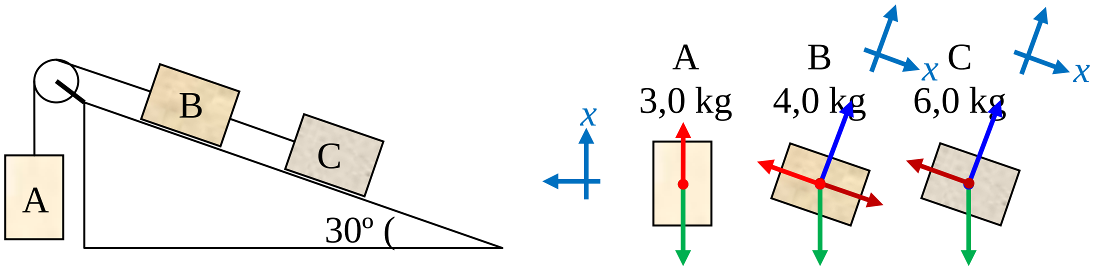
$$v_y = v_{0y} + at \rightarrow v_y = 0 - \left(9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t \Leftrightarrow v_y = -34{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

O ângulo é então

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{-34{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right) = -86{,}2^{\underline{o}}$$

O sinal negativo significa que o ângulo é para baixo da horizontal (na figura está apresentado o que na verdade é o simétrico deste ângulo).

2. Na figura abaixo os blocos A, B e C têm massas de respetivamente 3,0 kg; 4,0 kg e 6,0 kg. A inclinação do plano é de 30º e não há atrito.



Considere os três blocos como corpos pontuais e:

a. **(1,0 val)** Copie para a sua folha de prova o desenho dos três corpos na metade direita e marque nele as forças que atuam sobre os corpos.

b. **(2,0 val)** Calcule a aceleração do sistema e as tensões nas cordas (designe por F_{T1} a tensão na corda entre A e B e F_{T2} a tensão entre B e C).

(***a***) Forças marcadas no desenho. Azul escuro: normais, verde: pesos, vermelho: tensões F_{T1} (claro) e F_{T1} (escuro). Marcámos também na figura, a azul claro, um referencial local, ao longo da corda, i.e. da direção do movimento.

(***b***) No referencial local indicado a 2ª lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, dá-nos, após projeção no referencial,

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} A,x: \quad -F_{gA} + F_{T1} = m_A a \quad (1) \\ B,x: \quad -F_{T1} + F_{T2} + F_{gB}\,\mathrm{sen}\,30 = m_B a \quad (2) \\ B,y: \quad -F_{gB}\cos 30 + F_{NB} = 0 \quad (3) \\ C,x: \quad -F_{T2} + F_{gC}\,\mathrm{sen}\,30 = m_C a \quad (4) \\ C,y: \quad -F_{gC}\cos 30 + F_{NC} = 0 \quad (5) \end{cases}$$

Nem todas estas equações vão ser necessárias para resolver o problema. Na verdade, apenas as equações segundo os *xx* interessam (1, 2, 4). As equações segundo os *yy* (3, 5) só seriam necessárias se houvesse atrito ou outras forças de tração.

Somando as equações 1, 2 e 4 as tensões cancelam e temos, no SI,

$$(1) + (2) + (4) \rightarrow (-F_{gA} + F_{T1}) + (-F_{T1} + F_{T2} + F_{gB}\,\mathrm{sen}\,30) + (-F_{T2} + F_{gC}\,\mathrm{sen}\,30)$$

$$= m_A a + m_B a + m_C a \Leftrightarrow -m_A g + m_B g\frac{1}{2} + m_C g\frac{1}{2} = (m_A + m_B + m_C)a$$

$$\Leftrightarrow \left(-m_A + \frac{1}{2}m_B + \frac{1}{2}m_C\right)g = (m_A + m_B + m_C)a \Leftrightarrow a$$

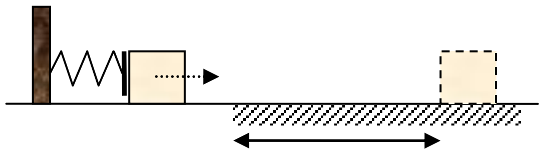
$$= g\left(\frac{-3{,}0 + \frac{1}{2}4{,}0 + \frac{1}{2}6{,}0}{3{,}0 + 4{,}0 + 6{,}0}\right) \Leftrightarrow a = \frac{2}{13}g = 1{,}507\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \left(1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$$

O valor positivo significa que o Substituindo este resultado em (1) e (4) obtemos as tensões. A 2 A.S. temos

$$(1) \rightarrow -F_{gA} + F_{T1} = m_A a \Leftrightarrow F_{T1} = (3{,}0\ \mathrm{kg})\left(1{,}507\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) + (3{,}0\ \mathrm{kg})\left(9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 33{,}9\ \mathrm{N} \quad (34\ \mathrm{N})$$

$$(4) \rightarrow -F_{T2} + F_{gC}\,\mathrm{sen}\,30 = m_C a \Leftrightarrow F_{T2} = (6{,}0\ \mathrm{kg})\left(9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) - (6{,}0\ \mathrm{kg})\left(1{,}507\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$$
$$= 49{,}8\ \mathrm{N} \quad (50\ \mathrm{N})$$

3. Uma massa de 3,60 kg é acoplada a uma mola. A mola é comprimida de 8,00 cm e largada, desprendendo-se dela a massa a uma rapidez de 2,80 m/s. A massa entra numa zona com atrito, imobilizando-se após ter percorrido 4,50 m nesta (c.f. figura).



Questões:

a. **(0,5 val)** Calcule o impulso recebido pela massa desde a compressão da mola até ao seu desprendimento.

b. **(0,5 val)** Determine a constante elástica da mola.

c. **(1,0 val)** Calcule o coeficiente de atrito cinético entre a massa e a zona com atrito.

d. **(1,0 val)** Descreva as transformações de energia que ocorreram no sistema desde a compressão da mola até ao imobilizar da massa.

(*a*) Sejam '*i*' e '*f*' os instantes respetivamente de compressão máxima da mola e de desprendimento da massa. Aplicando o teorema de impulso-momento temos, segundo a direção do movimento

$$I = \Delta p \Leftrightarrow I = p_f - p_i \Leftrightarrow I = mv_f - 0 = (3{,}60\ \mathrm{kg})\left(2{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 10{,}08\ \mathrm{N.s} \quad (10{,}1\ \mathrm{N.s})$$

(*b*) Durante a expansão da mola só atua a força elástica, que é conservativa. Da definição $E_{p,elast} = \frac{1}{2}kx^2$ e da conservação de energia mecânica vem

$$E_{mi} = E_{mf} \Leftrightarrow E^i_{p,elast} + E_{ci} = E^f_{p,elast} + E_{cf} \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2 \Leftrightarrow k = \frac{mv_f^2}{x^2} \Leftrightarrow k$$
$$= \frac{(3{,}60\ \mathrm{kg})\left(2{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{(0{,}0800\ \mathrm{m})^2} = 4410\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad \left(4{,}41\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\right)$$

(*c*) Na derrapagem apenas atua a força de atrito, que é não-conservativa. Sejam agora '*i*' e '*f*' os instantes respetivamente de desprendimento da massa e de término da derrapagem. Do corolário $W_{NC} = \Delta E_m$ temos

$$W_{NC} = E_{mf} - E_{mi} \Leftrightarrow W_{NC} = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Todo este trabalho não-conservativo é devido à força de atrito cinético, logo $W_{NC} = -\frac{1}{2}mv_i^2$. Combinando este resultado com a definição de trabalho ($W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$) e a forma da força de atrito cinético ($f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$) vem

$$W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta\vec{r} = -\frac{1}{2}mv_i^2 \Leftrightarrow f_k \Delta r \cos\sphericalangle(F, \Delta r) = -\frac{1}{2}mv_i^2 \Leftrightarrow \mu_k mg\Delta r(-1) = -\frac{1}{2}mv_i^2 \Leftrightarrow \mu_k = \frac{v_i^2}{2g\Delta r} \Leftrightarrow \mu_k = \frac{\left(2{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4{,}5\text{ m})} = 0{,}088$$

(*d*) No pico da compressão toda a energia mecânica do sistema está na forma de energia potencial elástica. Soltada a corda a essa energia é progressivamente transformada em energia cinética da massa, até que, no momento do desprendimento, toda a energia é cinética. Chegada à zona com atrito, a massa vai perdendo gradualmente essa energia cinética, que vai sendo transformada em aquecimento da própria massa e do solo.

4. (de 3,0 val a 5,0 val) O arrasto do ar é uma força que é aproximadamente proporcional ao quadrado da velocidade. No entanto, não é exatamente igual: além do termo quadrático existem termos lineares, cúbicos, etc. Se incluírmos p.ex. um termo linear num problema de queda de um grave, a 2ª lei de Newton torna-se

$$m\frac{dv}{dt} = -av - bv^2 + g$$

(g = aceleração da gravidade, $+y$ para baixo) Obtenha uma expressão aproximada para a rapidez de um grave, largado do repouso, de 0,40 kg com a = 0,10 kg.s e b = 0,80 kg/m no primeiro segundo da queda. Utilize o método de Euler ou Heun/previsor-corretor (pontos extra se resolver por Heun) com um passo temporal de 0,20 s e execute as cinco iterações necessárias (pontos extra se fizer mais).

Fazendo uma tabela vem

Instante	**Rapidez Euler (m/s)**	**Previsor Euler *f(t,v)***		**Rapidez Heun (m/s)**	**Previsor Heun *f(t,v)***	**Corretor Heun $f(t,v^P)$**
0	0	9,8		0	9,8	1,6268
0,2	1,96	1,6268		1,14268	6,902894835	-3,564486371
0,4	2,28536	-1,217080659		1,476520846	5,070642169	-3,229329993
0,6	2,041943868	0,950444512		1,660652064	3,869306429	-2,662338838
0,8	2,23203277	-0,721948769		1,781348823	3,008255535	-2,153127317
1	2,087643017	0,561582517		1,866861645	2,362939786	-1,730911283

Os resultados são algo diferentes porque o problema é muito sensível ao passo. Passos maiores causam instabilidade numérica. Se se continuar as contas vamos verificar que a velocidade estabiliza no valor terminal é $v_t = 2{,}152\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, valor que pode ser obtido analiticamente (experimente!).

FIM