U.C. 21002

Álgebra Linear I

13 de Julho de 2016

- INSTRUÇÕES -

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância.
- O estudante deve preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. As questões do grupo I (escolha múltipla) devem ser respondidas no enunciado. As questões dos demais grupos devem ser respondidas no caderno de prova.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- A prova é constituída por 3 páginas e termina com a palavra FIM. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeitos de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o aluno deve explicitar todos os passos necessários. Respostas sem justificação não serão cotadas.
- Não é permitido usar máquina de calcular nem quaisquer elementos de consulta.

Critérios de Avaliação

Grupo I (escolha múltipla): Cada questão do grupo I vale 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados 1/3 valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta assinalada. A classificação mínima do grupo I é de 0 valores. As restantes questões têm as seguintes cotações:

II	**III**	**IV**	**V**
4 val.	4 val.	4 val	4 val

Por favor preencha os seus dados

Nome:

Nº de Estudante

B.I.:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo. Caso pretenda anular uma resposta escreva "Anulado"junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

I. Questões de escolha múltipla.

1. Seja A uma matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então:

☐ a) A é diagonalizável se e só se tem n valores próprios distintos.
☐ b) Se A é diagonalizável então A tem n valores próprios distintos.
☐ c) Se A tem n valores próprios distintos então é diagonalizável.
☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

2. Recorde que $tr(A)$, o *traço* de uma matriz A, é a soma de todos os elementos da sua diagonal principal. Considere a aplicação $tr_n : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que a cada matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ associa o seu traço.

☐ a) tr_n não é uma aplicação linear.
☐ b) A matriz de tr_n (para a base canónica nos espaços de partida e chegada) tem n valores próprios distintos.
☐ c) O núcleo de tr_n tem dimensão $n^2 - 1$.
☐ d) A imagem de tr_n tem dimensão n.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$. Então $\mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, b.c._{\mathbb{R}^3})$ é a matriz

☐ a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ☐ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0\}\,, \quad B = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : xyzw = 0\}$$

$$C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ ou } y = 0\}\,, \quad D = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } y = 0\}$$

Então os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

☐ a) B e D.
☐ b) C e D.
☐ c) A e D.
☐ d) A, B, e D.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Utilizando o método de Laplace, calcule o determinante da matriz

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Explicite as escolhas que fez em cada passo da resolução.

III. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss-Jordan aplicado à matriz $[A|I_3]$, e resolva o sistema $AX = B$.

b) Resolva o mesmo sistema pela regra de Cramer.

IV. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcule os valores próprios de A.

b) Determine os vectores próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea a).

c) Determine se é possível escrever A na forma $A = PDP^{-1}$ onde P é uma matriz invertível e D é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine P e D nessas condições.

V. Considere a aplicação linear $h : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$h(A) = A - A^T,$$

a) Obtenha o núcleo e a imagem de h e explicite uma base para cada um desses espaços.

b) Obtenha a matriz que representa a aplicação h quando se toma tanto no espaço de chegada como no de partida a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Recorde que a base canónica é

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

FIM