

”

E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio



UNIDADE CURRICULAR: FÍSICA GERAL

CÓDIGO: 21048

DOCENTE: Nuno Sousa

A preencher pelo estudante

NOME:

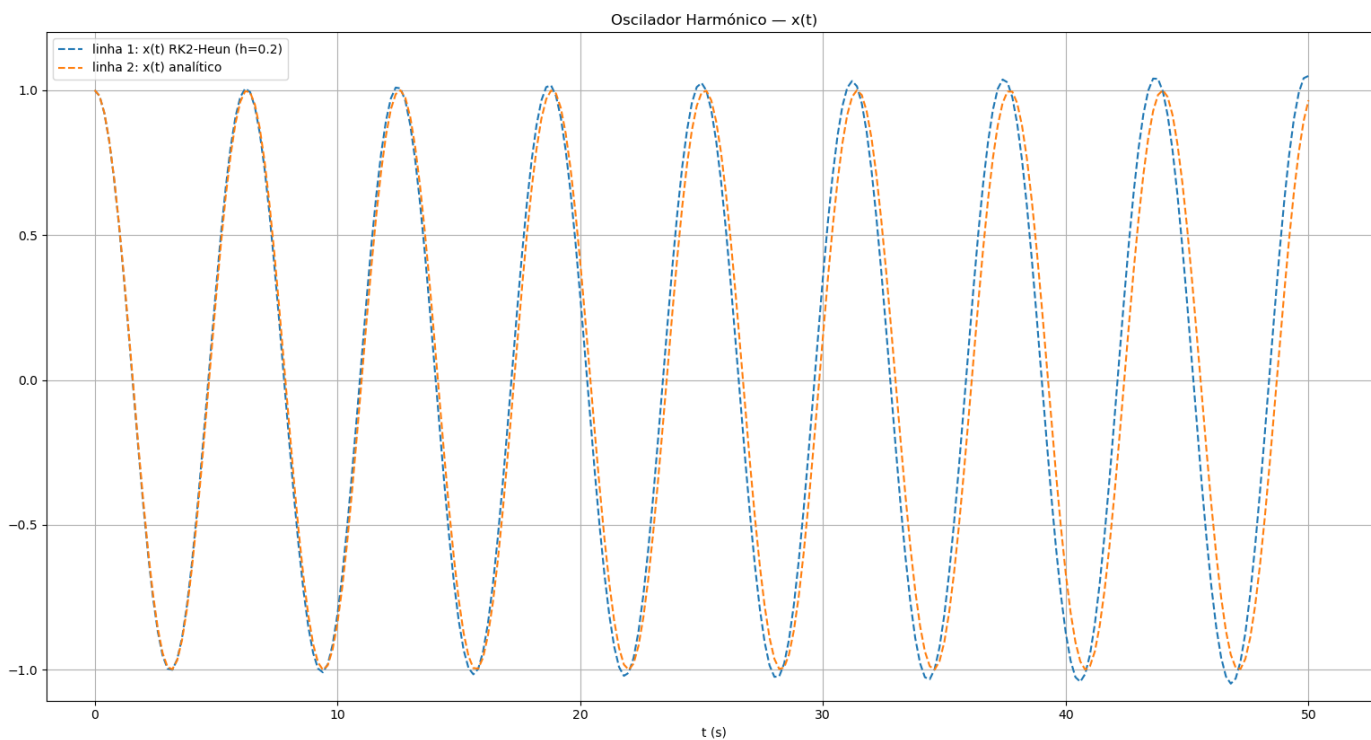
N.º DE ESTUDANTE:

CURSO: Licenciatura em Engenharia Informática

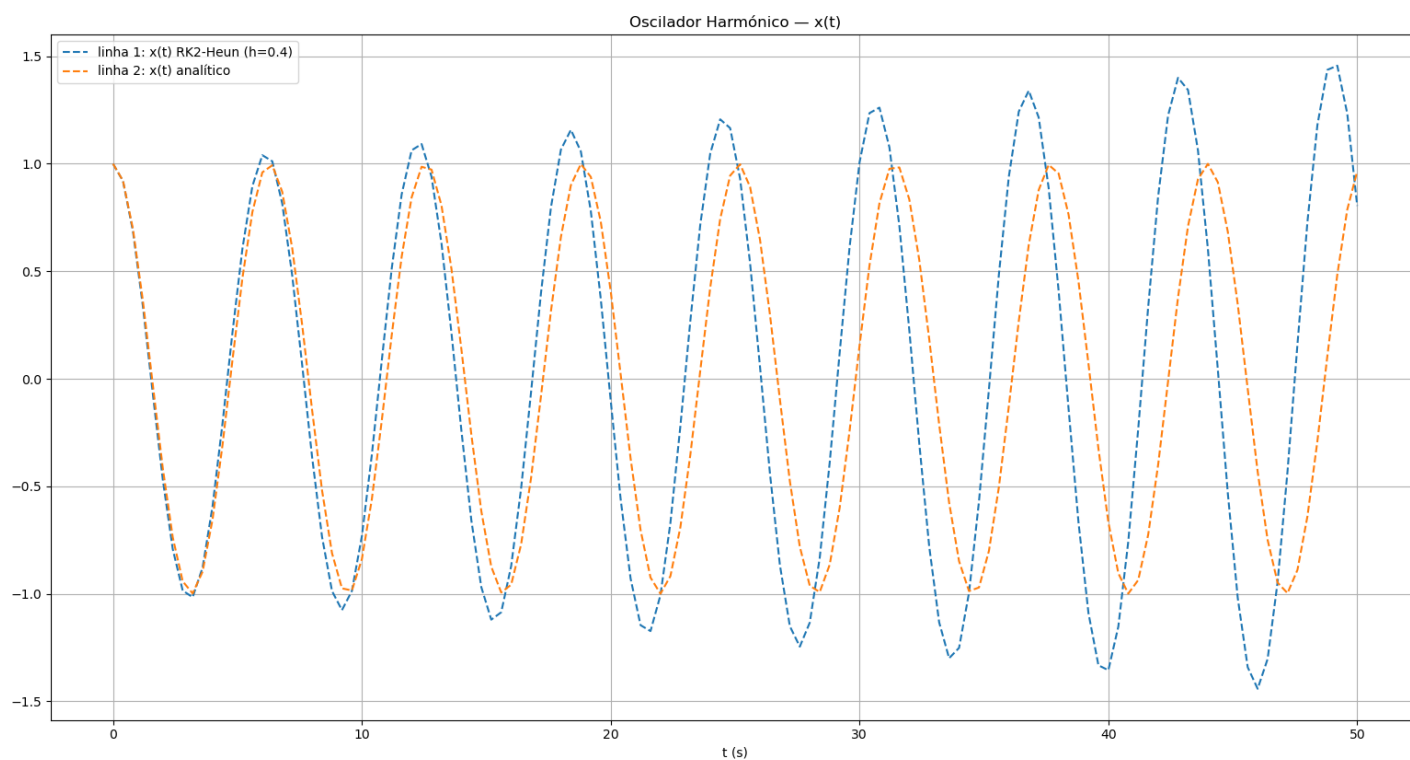
DATA DE ENTREGA: 05/01/2026

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

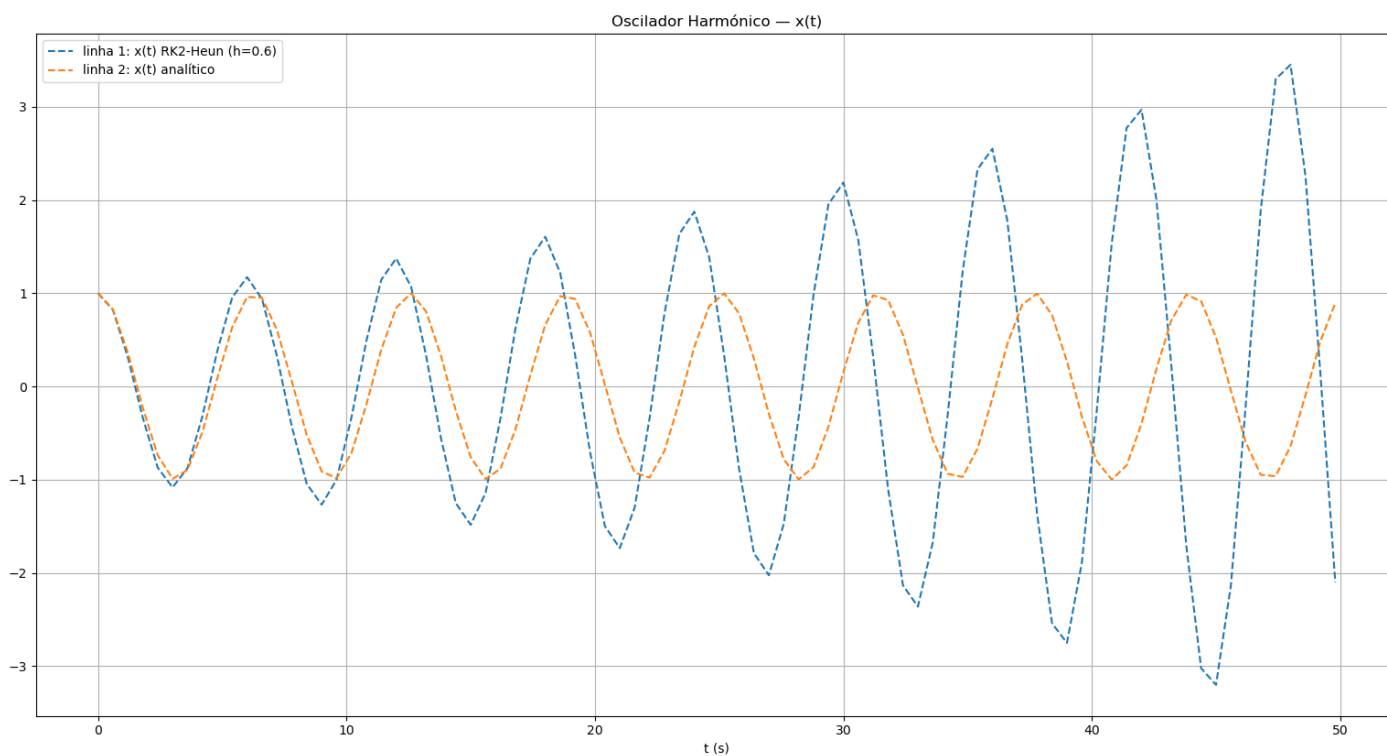
1.a – O gráfico com o passo (h) de 0,2 s é o seguinte:



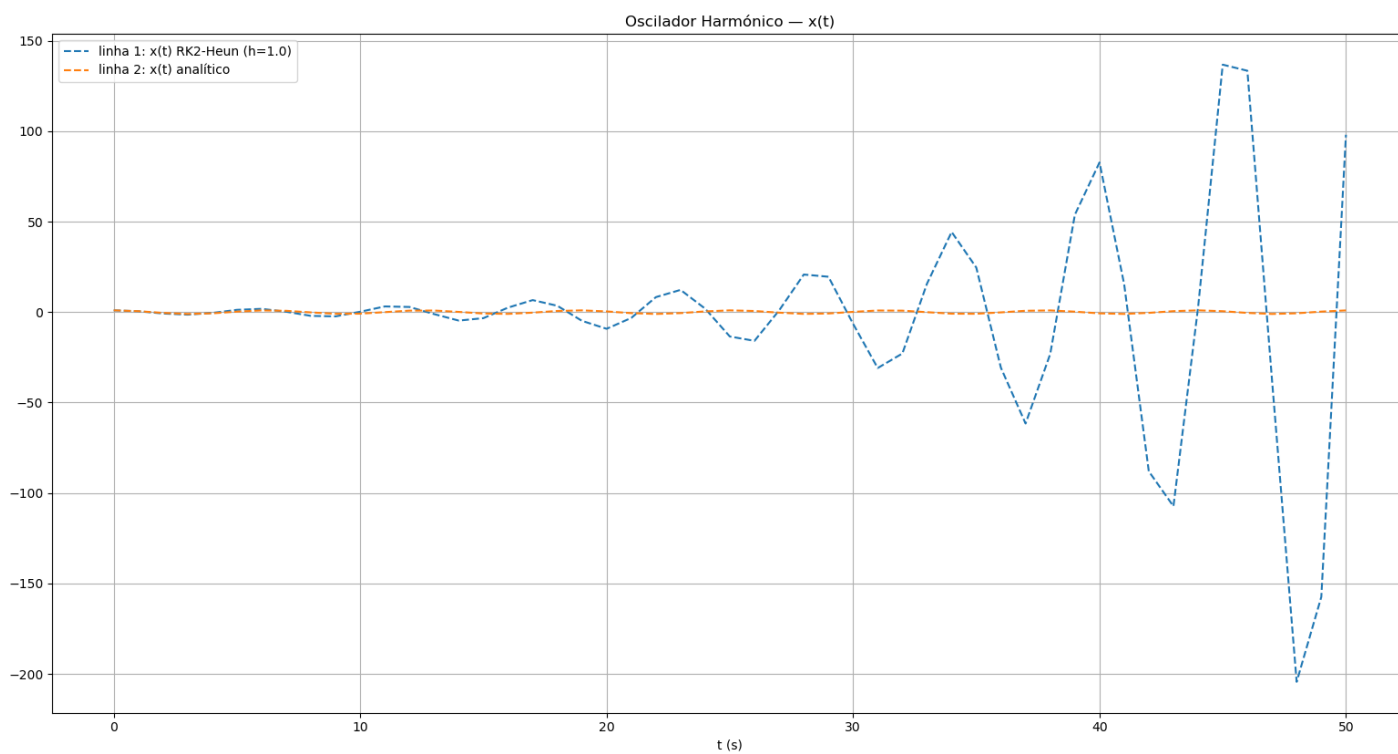
1.b – O gráfico com o passo (h) de 0,4 s é o seguinte:



O gráfico com o passo (h) de 0,6 s é o seguinte:



O gráfico com o passo (h) de 1,0 s é o seguinte:



Analisando os vários gráficos acima, verifica-se que, à medida que o passo (h) aumenta, torna-se cada vez mais evidente o surgimento

de dois erros na solução numérica comparativamente com a solução analítica. Primeiro, verifica-se um erro de fase, ou seja, com o passar do tempo (t), a frequência com que cada máximo e mínimo ocorre é maior na solução numérica face à analítica. O outro erro identificado, é o crescimento da amplitude, que também se torna cada vez mais evidente com o decorrer do tempo (t).

Do estudo do gráfico com passo de 0,4 s, verifica-se que a amplitude do método numérico aumenta ao longo do tempo, passando de ~ 1 para valores acima de 1,3–1,5, já os mínimos e máximos também começam a surgir um pouco antes dos analíticos, desfasamento que cresce ao longo do tempo. Observando o gráfico com passo de 0,6 s, verificam-se os mesmos fenómenos, mas de forma mais clara, a amplitude cresce mais depressa, chegando a atingir valores ~ 3 , e o desfasamento aparece mais cedo e é bem mais claro. Examinando o gráfico com passo de 1,0 s, torna-se visível a instabilidade numérica, pois a amplitude explode, crescendo para dezenas/centenas, de tal forma que torna a comparação de fase quase irrelevante.

1.c – No diálogo com o ChatGPT, obteve-se a seguinte resposta:

Porque é que o RK2 (Heun) não coincide com a solução analítica no MHS?

No movimento harmónico simples ideal (sem atrito), o sistema é conservativo: a energia mecânica total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

mantém-se constante, e o movimento é uma oscilação perfeita com frequência angular ω . Para $\omega = 1 \text{ rad/s}$, $x(0) = 1 \text{ m}$ e $v(0) = 0$, a solução analítica é $x(t) = \cos t$. Esta solução representa, no espaço de fase (x, v) , uma trajetória fechada (idealmente “circular/elíptica”) com energia constante.

Quando aplicas um método numérico como o RK2 (Heun), deixas de ter evolução contínua e passas a ter uma sequência de “saltos” de duração $h = 0,2 \text{ s}$. O método estima a aceleração e a velocidade com base em valores **dentro do intervalo**, mas continua a ser uma aproximação: em cada passo existe um pequeno desvio inevitável entre a dinâmica real e a dinâmica “discretizada”.

1) Efeito físico mais importante: não conservação exata da energia

O MHS é particularmente sensível porque a energia alterna continuamente entre:

- energia potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ (máxima nos extremos),
- energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ (máxima no equilíbrio).

A solução analítica faz esta troca **sem perdas nem ganhos**, mantendo E rigorosamente constante.

Já o Heun **não impõe** essa conservação. O que acontece fisicamente é que o integrador pode introduzir um “trabalho numérico” artificial:

- em alguns métodos isso aparece como **amortecimento numérico** (a amplitude decai),
- noutros, como o Heun neste tipo de sistema, pode surgir **injeção numérica de energia** (a amplitude cresce ligeiramente).

É por isso que, ao longo do tempo, podes observar picos de $x(t)$ a ficarem um pouco acima de 1 m (ou, dependendo da implementação e do passo, um ligeiro decaimento). Não é um fenómeno físico real; é um efeito do método.

Nesta primeira parte da resposta, a IA explica que o RK2 (Heun) não coincide com a solução analítica do movimento harmónico simples porque a evolução contínua é substituída por um processo iterativo, em que o tempo é dividido em intervalos de tamanho h (o “passo do algoritmo”) e a solução é construída ponto a ponto. Esta ideia é correta, mas importa sublinhar que os “saltos” não são fenómenos físicos, mas sim do procedimento de cálculo, que só garante uma aproximação nos instantes t_n .

No movimento harmónico simples, a equação do movimento decorre da 2.ª lei de Newton, $\sum F = ma$, com uma força elástica

proporcional ao deslocamento e ao sentido de retorno, sendo que a solução analítica traduz exatamente esta relação durante todo o intervalo de tempo, descrevendo um oscilador ideal e conservativo. Por sua vez, o método de Heun tenta aproximar essa dinâmica usando o esquema previsor–corretor, em que primeiro faz uma previsão do valor no fim do passo (tipo Euler) e depois aplica uma correção usando a média entre a derivada no início e a derivada avaliada no fim previsto. Assim, embora se reduza o erro face ao Euler simples, não se elimina o facto essencial, ou seja que em cada iteração existe um erro local inevitável que, ao repetir-se, pode propagar-se e acumular-se, afastando progressivamente a solução numérica da analítica.

O aspeto mais crítico, que a IA identifica corretamente, é a consequência dessa discretização num sistema conservativo, ou seja, que no movimento harmónico simples ideal a energia mecânica $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ deve manter-se constante, contudo o Heun não tem um mecanismo que imponha essa conservação quando atualiza x e v por estimativas dentro de cada passo. A IA poderia ser ainda mais precisa ao frisar que este efeito não deve ser interpretado como “novo comportamento físico” do oscilador, mas como um artefacto do integrador, onde pequenas discrepâncias numéricas podem equivaler a um “trabalho” artificial, surgindo qualitativamente como amortecimento numérico (energia a decrescer, amplitude a diminuir) ou como injeção numérica de energia (energia a crescer, amplitude a aumentar). Assim, picos de $x(t)$ ligeiramente acima de $1m$ resultam do passo finito e da regra iterativa usada para aproximar a dinâmica, sendo tanto mais visíveis quanto h representa uma fração maior do tempo característico do movimento.

2) Outro efeito típico: erro de fase (a oscilação “perde o compasso”)

Mesmo quando a amplitude parece quase correta, o método pode reproduzir uma oscilação com uma frequência **ligeiramente diferente** da frequência real. Em termos físicos, é como se o integrador “visse” uma mola com rigidez um pouco alterada, porque a forma como estima aceleração e velocidade dentro de cada passo não coincide exatamente com o comportamento contínuo.

Resultado observável:

- os máximos e mínimos do RK2 aparecem **um pouco adiantados ou atrasados** face aos da solução analítica;
- esse desfasamento é pequeno no início, mas **acumula-se** a cada período.

Este é o motivo mais comum para duas curvas começarem quase coincidentes e depois “descolarem” ao fim de alguns ciclos.

3) Por que o passo $h = 0,2$ importa (linguagem física)

O passo h é a tua “resolução temporal”. Com $\omega = 1$, o período é $T = 2\pi \approx 6,28$ s. Com $h = 0,2$ s, tens cerca de 31 pontos por período — normalmente suficiente para um bom traçado.

Mas mesmo com boa resolução, o método continua a:

- não conservar energia exatamente,
- introduzir um pequeno erro no “timing” da oscilação.

E se aumentares h , esses efeitos tornam-se muito mais visíveis: a aproximação deixa de capturar corretamente a troca energia cinética/potencial dentro do passo, e a oscilação numérica passa a ter amplitude e fase cada vez menos fiéis.

Nesta segunda imagem, a IA desloca o foco para um efeito diferente do anterior, o erro de fase, isto é, a discrepância no “timing” da oscilação. Esta explicação é pertinente porque, mesmo que a amplitude pareça razoável num primeiro momento, um método iterativo com passo finito pode reproduzir uma oscilação com período ligeiramente diferente do real, fazendo com que máximos e mínimos surjam progressivamente adiantados ou atrasados relativamente à solução analítica. A metáfora de o integrador “ver” uma mola com rigidez alterada é fisicamente útil como interpretação qualitativa, pois traduz o facto de a regra discreta (a forma como estima as grandezas ao longo de cada passo) conduzir a uma dinâmica efetiva próxima, mas não idêntica, à do sistema contínuo.

Ainda assim, a IA poderia precisar melhor a origem deste fenómeno, ou seja, que o erro de fase não resulta apenas de “estimar aceleração e velocidade dentro do passo”, mas do facto de o método aproximar a evolução por incrementos finitos, o que altera ligeiramente a taxa de rotação da trajetória no espaço de fase. Por isso, o desfasamento é pequeno em cada ciclo, mas acumula-se ao longo de muitos períodos, justificando a observação de curvas que começam quase coincidentes e depois “descolam”. Importa também evitar a leitura de que o sistema “muda” fisicamente, tal como no caso energético, trata-se de um artefacto numérico, não de uma alteração real da rigidez da mola.

Na parte final, ao discutir o papel do passo h , a IA acerta ao tratá-lo como uma medida de “resolução temporal” e ao quantificar o número de pontos por período (com $\omega = 1$, $T \approx 2\pi$, logo $h = 0,2s$ dá cerca de 31 pontos por ciclo). No entanto, convém reforçar que “ter muitos pontos por período” é condição sobretudo para um bom traçado visual, não uma garantia de fidelidade dinâmica por tempos longos, sendo que em oscilações, o erro de fase é tipicamente sistemático e a discrepância no tempo dos extremos cresce com o número de ciclos. Assim, ao aumentar h , o problema não é apenas “menos pontos”, mas o facto de cada iteração cobrir uma fração maior do período e passar a representar pior a curvatura do movimento dentro do intervalo, tornando o desfasamento temporal cada vez mais evidente.

1.d – Para obter resultados numéricos mais corretos no MHS, eu atuaria em duas frentes complementares: diminuir o passo temporal h e aumentar a ordem do método de Runge–Kutta. Ao reduzir h , passo a amostrar a dinâmica com maior resolução, captando melhor a variação contínua de $x(t)$ e $v(t)$ dentro de cada intervalo, o que diminui o erro acumulado e reduz sobretudo o erro de fase que se vai somando ciclo após ciclo. Em paralelo, ao usar um método RK de ordem superior (por exemplo RK4 em vez de RK2), a aproximação local da evolução

deixa de ser quase linear/quadrática e passa a representar melhor a curvatura real da solução, diminuindo significativamente o erro por passo e, conseqüentemente, a diferença face à solução analítica ao longo do tempo. Na prática, estas duas medidas, h menor e RK de maior ordem, tornam a trajetória numérica mais fiel ao comportamento ideal do oscilador, com melhor coincidência de fase e amplitude no intervalo de simulação.