e-Fólio A

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Licenciatura: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2014/2015

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do **e-Fólio A**, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 6 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato *pdf*), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio A" até ao dia **1 de dezembro**.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a VI têm cotação de 0.6 valores cada.

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respetivo.

1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ considere os seguintes subconjuntos:

(i) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_4\}$,
(ii) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 x_4 = 0\}$,
(iii) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
(iv) $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon 4x_4 = 3x_3\}$.

Então:

☐ **a)** Os conjuntos A, C e D são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.
☐ **b)** Nenhum dos conjuntos A, B, C e D é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
☐ **c)** Só os conjuntos A e B são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.
☐ **d)** Só o conjunto C é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

2. Considere as matrizes A e B definidas por $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Então

☐ **a)** $\det AB = 0$
☐ **c)** $\det 3A = 3$
☐ **b)** $\det B^{-1}A = 6$
☐ **d)** $\det 4B = 4$

3. Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Então

☐ **a)** $\operatorname{adj} M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
☐ **c)** $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} M) = 3M$
☐ **b)** $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
☐ **d)** $M^2 = M$

4. Para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ considere o seguinte sistema de 3 equações lineares nas incógnitas reais x, y e z

$$\begin{cases} -x - (\alpha - 1)y + z = -1 \\ -x - y + \alpha z = \beta \\ \ \ x + y - z = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Então o sistema (1)

☐ **a)** $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ o sistema (1) tem solução.
☐ **b)** se $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ é solução do sistema (1).
☐ **c)** $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ não existe solução do sistema (1).
☐ **d)** $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ não é solução do sistema (1).

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (i) Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss*, determine se a matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

é invertível, e no caso afirmativo calcule R^{-1} usando o *Método de Eliminação de Gauss-Jordan* aplicado à matriz $[R|I_4]$.

(ii) Utilizando a alínea anterior resolva a equação $RX = B$ onde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III. Seja $N \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definida por $N = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & x & w & -z \\ -z & -w & x & y \\ -w & z & -y & x \end{pmatrix}$.

(i) Mostre que $\det N = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$.
(*Sugestão: Considere a matriz* $NN^\top$.)

(ii) Mostre que $\det N = 0 \iff N = 0$.

IV. Por definição o gráfico de uma função real de variável real f é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ constituído pelos pontos da forma $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

Supondo que f é um polinómio de grau 3 da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ determine coeficientes reais a, b e c tais que os pontos $(0, 1), (1, 2)$ e $(2, 3)$ pertençam ao gráfico de f.

V. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes simétricas. Será que AB é necessariamente simétrica? Justifique a sua resposta.

VI. Dadas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $2A^\top B = I_n$, mostre que A, B e B^2 são invertíveis e indique as respetivas inversas.

FIM