Computação Numérica 21021

Ano letivo 2011/12

Orientações de resposta ao exame/p-folio de 1ª época

1. Considere a função $y(x) = \ln x - x^2 + 4$.

a. **(1,5 val)** Construa o polinómio de Taylor de $y(x)$ de grau 2, com ponto de origem $x_0 = 1$, e use-o para calcular uma estimativa para $y(x = 1.25)$.

Nota: $(\ln f)' = f'/f$; $(f^k)' = k\, f^{k-1} f'$.

Para aplicar a fórmula de Taylor precisamos de $f(x_0) = 3$ e das 1ª, 2ª derivadas de $y(x)$ em $x_0 = 1$ e da forma da 3ª derivada. Estas são

$$y'(x) = \frac{1}{x} - 2x \rightarrow y'(1) = -1 \;\; ; \;\; y''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 \rightarrow y''(1) = -3 \;\; ; \;\; y'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Com estes dados temos então

$$y(x) = 3 - (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + R_2 \Leftrightarrow y(x) = \frac{5}{2} + 2x - \frac{3}{2}x^2 + R_2 \;\; ; \;\; |R_2| \leq \frac{(x-1)^3}{6}\frac{2}{\xi^3}$$

b. **(2 val)** Entre $x = 1$ e $x = 3$ a função tem um e um só zero (i.e. raiz da equação $y(x) = 0$). Encontre uma aproximação para esse zero recorrendo ao método da bisseção com 5 iterações.

Escrevendo um quadro de biseções, temos, recorrendo à calculadora,

a	b	xk	f(a)	f(b)	f(xk)	Erro de aprox.(%)
1	3	2	3	-3,9014	0,69315	
2	3	2,5	0,69315	-3,9014	-1,3337	20,000%
2	2,5	2,25	0,69315	-1,3337	-0,2516	11,111%
2	2,25	2,125	0,69315	-0,2516	0,23815	5,882%
2,125	2,25	2,1875	0,23815	-0,2516	-0,0024	2,857% 1 alg.sig
2,125	2,1875	2,15625	0,23815	-0,0024	0,11896	1,449%
2,15625	2,1875	2,17188	0,11896	-0,0024	0,05855	0,719%
2,17188	2,1875	2,17969	0,05855	-0,0024	0,02814	0,358% 2 alg.sig
2,17969	2,1875	2,18359	0,02814	-0,0024	0,01289	0,179%
2,18359	2,1875	2,18555	0,01289	-0,0024	0,00525	0,089%
2,18555	2,1875	2,18652	0,00525	-0,0024	0,00143	0,045% 3 alg.sig

O quadro vai além do que é pedido. Ao fim de 5 iterações teríamos como estimativa $x = 2{,}15625$.

c. **(2 val)** Determine uma estimativa para o erro da aproximação obtida na alínea anterior e, baseado nessa estimativa, indique quantos algarismos significativos deverá ter o zero aproximado. Comente também a qualidade do resultado obtido e diga se deveria proceder ou não a melhorias desse resultado.

A estimativa do erro está indicada na tabela. Ao fim das 5 iterações o erro de aproximação é de cerca de 1,45% (0,0145). Pelo critério de Scarborough temos garantia apenas 1 algarismo significativo correto, pelo que se deve continuar as iterações por mais algum tempo. Na tabela vemos que ao fim de 10 iterações atingimos 3 algarismos significativos corretos, o que já é aceitável. Esta lentidão de convergência é típica do algoritmo da bisseção.

d. **(5 val)** Escreva uma rotina em Octave que permita resolver a alínea b. por implementação do algoritmo da bisseção. O programa deve conter pelo menos um critério de paragem, o qual fica à sua escolha, findo o qual devolve ao utilizador o valor calculado. Inclua todos os comentários que achar relevantes.

Abaixo temos uma possibilidade muito simples, baseada no algoritmo descrito na p.62 do livro de texto. O código é fácil de ler e dispensa comentários de maior.

```
function [ ret ] = bissec (a,b,erro)

puts("Nota: este programa nao verifica se existe solucao no intervalo introduzido; apenas a procura.\n");

puts("O utilizador deve conferir analiticamente se tal solucao efetivamente existe.\n");

if b-a==0; error("erro: intervalo nao pode ser nulo"); endif;

if b-a<0; c=b; b=a; a=c; endif

d=1/2*(b-a);

x=a+d;

fa=f(a);

fb=f(b);

while d>erro

 fx=f(x);

  if sign(fx)==sign(fa); a=x; fa=fx;

  else b=x; fb=fx;

  endif

 d=1/2*(b-a);

 x=a+d

endwhile

endfunction

function y=f(x); y=log(x)-x.^2+4; endfunction
```

2. Considere a matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. **(1,5 val)** Execute a decomposição LU da matriz A

Após algumas contas obtemos

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 17/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 10/7 \end{pmatrix}$$

b. **(1,5 val)** Resolva o sistema de equações lineares $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Resolvendo '$Ly = b$' por substituição direta tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 17/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15/7 \end{pmatrix}$$

Resolvendo agora '$Ux = y$' por substituição inversa obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15/7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

c. **(1 val)** Escreva uma sequência de comandos em Octave que permita verificar, por multiplicação direta de matrizes, que a solução que encontrou está correta.

```
A=[1 -3 4; 2 1 0; 5 2 2]
x=[1; -2; -3/2]
A*x
```

Se a solução estiver correta, o comando `A*x` devolverá uma matriz-coluna com valores 1, 0, -2 respetivamente. O estudante pode verificar que assim é.

3. Seja $y(x) = e^x + \operatorname{sen}(x)$.

a. **(2 val)** Construa o polinómio interpolador de Lagrange para os nós x = 0, 1 e 2. Os valores aproximados da função nesses pontos são respetivamente 1.0000; 3.55975 e 8.29835.

Basta aplicar a fórmula de Lagrange para os nodos indicados. Os polinómios $L_i(x)$ são

$$L_0 = \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$
$$L_1 = \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} = \frac{x(x-2)}{-1}$$
$$L_2 = \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} = \frac{x(x-1)}{2}$$

O polinómio de Lagrange é então

$$P_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} + 3{,}55972 \cdot \frac{x(x-2)}{-1} + 8{,}29835 \cdot \frac{x(x-1)}{2} \Leftrightarrow P_2(x)$$
$$= 1 + 1{,}470265x + 1{,}089455x^2$$

b. **(1,5 val)** Recorra ao polinómio obtido para calcular $y(x = 1.9)$ e calcule os erros absoluto e relativo da interpolação considerando como valor real $y(x = 1.9) = 7.63219$.

O polinómio em 1,9 é

$$P_2(1{,}9) = 1 + 1{,}470265 \cdot (1{,}9) + 1{,}089455 \cdot (1{,}9)^2 = 7{,}726436 \approx 7{,}72644$$

(Arredondámos para ter o mesmo n.º de algarismos significativos do valor real) Isto corresponde a erros absoluto e relativo de, respetivamente,

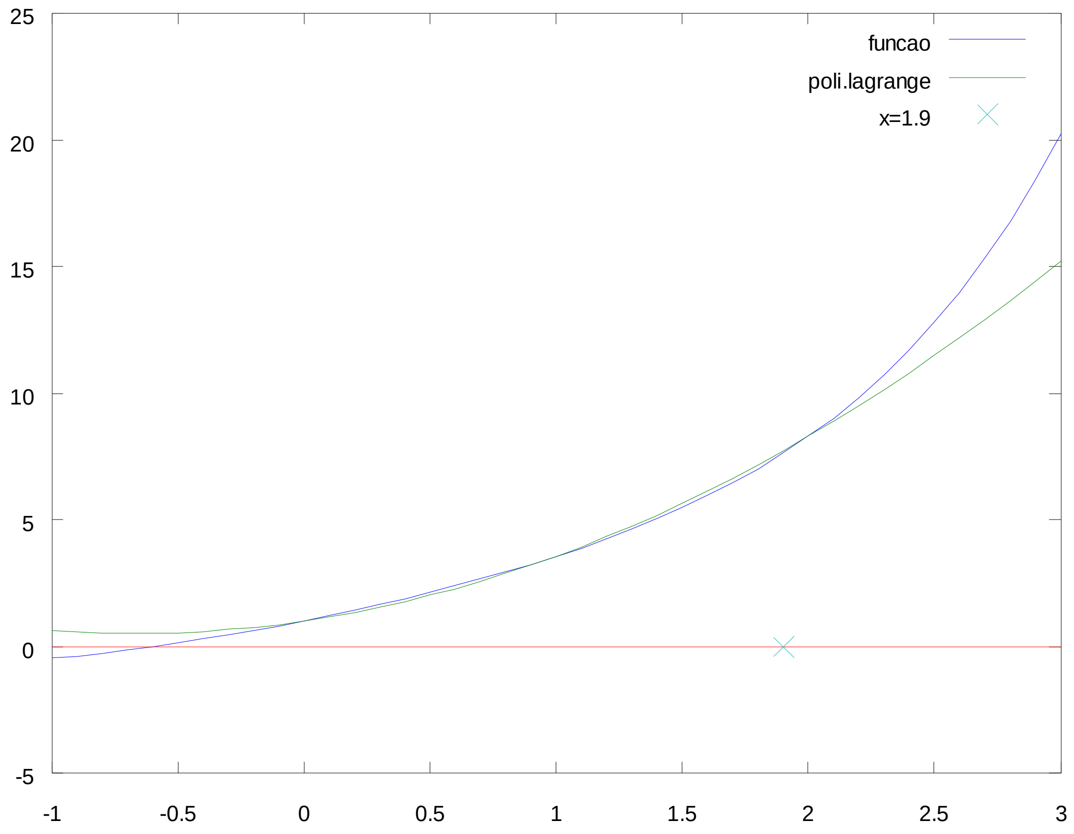
$$\varepsilon = |7{,}63219 - 7{,}72644| = 0{,}09425 \quad ; \quad r = \frac{0{,}0905}{|7{,}63219|} = 0{,}012 \ \ (1{,}2\%)$$

O erro relativo é baixo, mas ainda apreciável.

c. **(2 val)** Apresente uma rotina em Octave que crie um gráfico conjunto das duas funções no intervalo de -1 a 3 e que marque o ponto $x = 1.9$ no eixo dos *xx*.

```
x=-1:0.1:3;
y1=exp(x)+sin(x);
y2=1+1.470265*x.+1.089455*x.^2;
y3=0*x;
plot(x,y1,";funcao;",x,y2,";poli.lagrange;",x,y3,1.9,0,"x;
x=1.9;")
```

Introduzimos uma função auxiliar $y = 0$ para visualizar o eixo dos *xx*. Esta sequência de comandos dar-nos-á o gráfico seguinte:



Note-se a boa concordância entre o polinómio aproximante e a função junto aos nodos. À medida que nos afastamos dos nodos a aproximação vai perdendo qualidade, até que longe deles se torna inapropriada.

FIM