E-FÓLIO A

Proposta de resolução

1.1. Resposta: Pretende-se determinar a matriz inversa da matriz A.

1.2. Resposta: A resolução está errada a partir da etapa (d). As transformações elementares efetuadas até à etapa (c) não apresentam erros. Ao aplicar a transformação elementar $\ell_3 - \ell_2$ à matriz da etapa (c) é obtido -1 na posição $(3,5)$ da matriz da etapa (d), no entanto deveria ter sido obtido -5, porque $-3-2=-5$.

1.3. Resposta: Corrigindo a resolução a partir da etapa (d), tem-se

$$\cdots \xrightarrow[\ell_3-\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_1-\ell_3 \\ \ell_2-5\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 27 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, conclui-se que a matriz inversa da matriz A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 27 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1. Resposta: Considere o sistema linear, dependente dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x + y - z = -3 \\ \alpha x + \alpha y \phantom{{}-z} = \beta \\ \phantom{-x+{}} \alpha y - z = -4 \end{cases}.$$

Discuta o sistema em função de α e β (isto é, determine para que valores de α e β o sistema é impossível, possível determinado, ou possível indeterminado) e resolva-o quando possível.

2.2. Resolução: Com vista a classificar o sistema linear, considera-se a matriz ampliada e reduz-se esta a uma forma mais simples via transformações elementares sobre as linhas –algo já feito no enunciado:

$$\begin{cases} -x + \quad y - z = -3 \\ \alpha x + \alpha y \qquad = \beta \\ \qquad \alpha y - z = -4 \end{cases} \to [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ \alpha & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \end{array}\right] \to \dots$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \alpha & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \beta - 3\alpha + 8 \end{array}\right]^{*}.$$

A classificação do sistema faz-se com base na proposição 2.11 [p. 202, 6ª edição]:

- Se $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A|B]) \implies$ Sistema Impossível (SI);
- Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = n \implies$ Sistema Possível e Determinado (SPD);
- Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) < n \implies$ Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

A matriz ampliada $*$ presta-se à seguinte análise:

- Se $\alpha \neq 0$ e $2 - \alpha \neq 0$, ou seja $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, a matriz $*$ está em escada e $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = 3$, pois todas as linhas de $*$ são não nulas. Neste caso, o sistema é possível e determinado (independentemente do valor de β) e

$$\begin{aligned} (2-\alpha)z = \beta - 3\alpha + 8 &\iff z = \frac{\beta - 3\alpha + 8}{2-\alpha}, \\ \alpha y - z = -4 &\iff y = \frac{z-4}{\alpha} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha(2-\alpha)}, \\ -x + y - z = -3 &\iff x = 3 + y - z = \frac{\beta - \alpha - \alpha\beta}{\alpha(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

  $\therefore$ C.S. $= \{(\frac{\beta-\alpha-\alpha\beta}{\alpha(2-\alpha)}, \frac{\beta+\alpha}{\alpha(2-\alpha)}, \frac{\beta-3\alpha+8}{2-\alpha})\}$.

- Se $\alpha = 2$,

$$* = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 2 \end{array}\right].$$

  Neste caso, $*$ também está em escada. Logo $\mathrm{r}(A) = 2$. Agora, das duas uma:

  - Se $\beta \neq -2$, então $\mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{r}([A|B]) = 3$, logo o sistema é impossível.
  - Se $\beta = -2$, então $\mathrm{r}(A) = 2 = \mathrm{r}([A|B]) < 3$, logo o sistema é possível

indeterminado. Transformando $*$ na forma em escada reduzida, tem-se

$$* = \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\ell_1 \\ \frac{1}{2}\ell_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_1+\ell_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\therefore$ C.S. $= \{(1 - \frac{1}{2}z, -2 + \frac{1}{2}z, z) \colon z \in \mathbb{R}\}$.

- Se $\alpha = 0$, ainda é necessário uma transformação elementar sobre as linhas para que a matriz ampliada fique em escada

$$* = \left[\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & \beta+8 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2+2\ell_1]{} \left[\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right].$$

Assim, das duas uma:

  - Se $\beta \neq 0$, então $\mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{r}([A|B]) = 3$, logo o sistema é impossível.
  - Se $\beta = 0$, então $\mathrm{r}(A) = 2 = \mathrm{r}([A|B]) < 3$, logo o sistema é possível indeterminado. Transformando na forma em escada reduzida, tem-se

$$\left[\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\ell_1 \\ \frac{1}{2}\ell_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_1-\ell_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\therefore$ C.S. $= \{(y-1, y, 4) \colon y \in \mathbb{R}\}$.

Conclusão:

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2 \wedge \beta \in \mathbb{R} & \text{SPD, C.S.} = \{(\frac{\beta-\alpha-\alpha\beta}{\alpha(2-\alpha)}, \frac{\beta+\alpha}{\alpha(2-\alpha)}, \frac{\beta-3\alpha+8}{2-\alpha})\}; \\ \alpha = 0 \begin{cases} \beta \neq 0 \\ \beta = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{SI, C.S.} = \varnothing; \\ \text{SPI, C.S.} = \{(y-1, y, 4) \colon y \in \mathbb{R}\}; \end{array} \\ \alpha = 2 \begin{cases} \beta \neq -2 \\ \beta = -2 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{SI, C.S.} = \varnothing; \\ \text{SPI, C.S.} = \{(1-\frac{1}{2}z, -2+\frac{1}{2}z, z) \colon z \in \mathbb{R}\}. \end{array} \end{cases}$$

3.1. Resposta: De acordo com os cálculos parciais apresentados, o que está a ser calculado é o determinante da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

utilizando o Teorema de Laplace (desenvolvimento do determinante de A seguindo a linha 1).

3.2. Exemplo de cálculo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 6 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \times (-1)^{1+3}(\dots) + 0 \times (-1)^{1+4}(\dots)$$

$$= 5 \times \underbrace{[(5 \cdot 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1) - (0 \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 6)]}_{\text{Regra de Sarrus}}$$

$$- 6 \times \underbrace{[(1 \cdot 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1) - (0 \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 6)]}_{\text{Regra de Sarrus}}$$

$$= 5 \times [(125 + 0 + 0) - (0 + 30 + 30)] - 6 \times [(25 + 0 + 0) - (0 + 6 + 0)]$$

$$= 5 \times (125 - 60) - 6 \times (25 - 6)$$

$$= 5 \times 65 - 6 \times 19$$

$$= 325 - 114$$

$$= \mathbf{211}$$

4.1. Respostas possíveis:

- Resolva o seguinte sistema.
- Dados o seguinte sistema, determine os valores de x e de y.
- Considere o sistema nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + \ \ z = 4 \end{cases}.$$

  Justifique que (S) é um sistema de *Cramer* e resolva-o, utilizando a regra de *Cramer*.

4.2. Resolução: Procederemos segundo o seguinte enunciado:

Considere o sistema nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + \ \ z = 4 \end{cases}.$$

Justifique que (S) é um sistema de *Cramer* e resolva-o, utilizando a regra de *Cramer*.

Iniciaremos por apresentar o sistema (S) na sua forma matricial

$$AX = B,$$

sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes do sistema, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ a matriz dos termos independentes.

Pela definição 2.14 [pág112] (6^{a} edição), do manual adotado, temos que:

> "um sistema de equações lineares $AX = B$ é um sistema de *Cramer* se A é uma matriz quadrada e invertível."

A matriz A é uma matriz 3×3 (3 linhas, 3 colunas) logo, uma matriz quadrada. Para justificarmos a sua invertibilidade, analisaremos o seu determinante:

$$\begin{aligned}|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} \qquad \text{(Laplace segundo a } 1^{\underline{a}} \text{ coluna)}\\ &= 3 - 4 - 2(2-6) + 3(4-9) = -8\end{aligned}$$

Pela proposição 3.23 [pág. 144], uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$. Uma vez que $\det(A) = -8$, diferente de zero, a matriz A é invertível, encontrando-se reunidas as condições para podermos afirmar que (S) é um sistema de *Cramer*.

Passemos à segunda parte da questão, a resolução do sistema (S) através da regra de *Cramer*. De acordo com a regra de Cramer, Proposição 3.31 [pág. 152], este sistema de equações lineares, $AX = B$, com $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertível, tem uma (única) solução na forma

$$\left(\frac{\det(A_{(1)})}{\det(A)}, \frac{\det(A_{(2)})}{\det(A)}, \frac{\det(A_{(3)})}{\det(A)}\right),$$

onde para cada $j = 1, 2, 3$, $A_{(j)}$ é a matriz que se obtém da matriz A substituindo a coluna j pela coluna de B.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned}\det(A_{(1)}) = \begin{vmatrix}4 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} \quad \text{(Laplace segundo a } 1^{\underline{a}} \text{ coluna)}\\ &= 4\times(-1) - 4\times(-4) + 4\times(-5) = -4 + 16 - 20 = -8,\\ \det(A_{(2)}) = \begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix}4 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix} \quad \text{(Laplace segundo a } 1^{\underline{a}} \text{ coluna)}\\ &= -4 - 2\times(-8) + 3\times(-4) = -4 + 16 - 12 = 0,\\ \det(A_{(3)}) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix} \quad \text{(Laplace segundo a } 1^{\underline{a}} \text{ coluna)}\\ &= 4 - 2\times 0 + 3\times(-4) = 4 - 12 = -8.\end{aligned}$$

Aplicando a regra de *Cramer*, obtemos os seguintes valores para as variáveis x, y e z:

$$x = \frac{\det(A_{(1)})}{\det(A)} = \frac{-8}{-8} = 1; \quad y = \frac{\det(A_{(2)})}{\det(A)} = \frac{0}{-8} = 0; \quad z = \frac{\det(A_{(3)})}{\det(A)} = \frac{-8}{-8} = 1.$$

O conjunto solução deste sistema de equações lineares será:

$$\text{C.S.} = \{(1,0,1)\}.$$

5.1. Averigue se b é combinação linear de $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ e $(3,2,1)$.
Sejam $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,3,4)$ e $u_3 = (3,2,1)$. O vector $b = (1,3,6)$ é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

De modo equivalente, b é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 se e só se o sistema linear $Ax = b$ é possível, onde $A = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Pelo método de Gauss,

$$Ax = b \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A terceira linha da matriz anterior é equivalente a uma equação impossível ($0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 1$) e logo o sistema $Ax = b$ é impossível. Conclui-se que $b = (1,3,6)$ não é combinação linear dos vectores $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,3,4)$ e $u_3 = (3,2,1)$.

5.2. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo uma base de U.
Considere-se o espaço vectorial $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, onde $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,3,4)$ e $u_3 = (3,2,1)$. Observa-se que $-5u_1 + 4u_2 = -5(1,2,3) + 4(2,3,4) = (-5,-10,-15) + (8,12,16) = (3,2,1) = u_3$. Logo, u_3 é combinação linear dos vectores u_1 e u_2 e tem-se $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$.
Por outro lado, os vectores $u_1 = (1,2,3)$ e $u_2 = (2,3,4)$ não são múltiplos um do outro. Tal implica que a sequência (u_1, u_2) é linearmente independente. Como (u_1, u_2) é uma sequência geradora de U linearmente independente, então (u_1, u_2) é uma base de U.
Pela alínea 5.1, sabe-se que o vector $b = (1,3,6)$ não é combinação linear dos vectores

u_1, u_2 e u_3. Logo, em particular, o vector b não pertence ao espaço vectorial U. Tal sugere que se considere a sequência (u_1, u_2, b) e que se demonstre que se trata de uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém uma base de U.

Sabe-se que uma sequência com três vectores distintos constitui uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se a sequência for linearmente independente. Se $B = [u_1\ u_2\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ tiver característica 3, então a sequência (u_1, u_2, b) é linearmente independente. Pelo método de Gauss,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deduz-se que B tem característica 3 e logo $((1,2,3),(2,3,4),(1,3,6))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém uma base de U.

5.3. Calcule $U \cap V$.

Por 5.2, sabe-se que (u_1, u_2) é base de U. Logo $\forall\ u \in U$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha(1,2,3) + \beta(2,3,4) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, 3\alpha + 4\beta).$$

Uma vez que $U \cap V = \{u \in \mathbb{R}^3 \colon u \in U \wedge u \in V\}$, então $u \in V$ se satisfizer a equação definidora de V: $2x + 3y + 9z = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 2(\alpha + 2\beta) + 3(2\alpha + 3\beta) + 9(3\alpha + 4\beta) = 0 &\Leftrightarrow 2\alpha + 6\beta + 6\alpha + 9\beta + 27\alpha + 36\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow 35\alpha + 49\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\tfrac{7}{5}\beta. \end{aligned}$$

Ora,

$$-\tfrac{7}{5}\beta(1,2,3) + \beta(2,3,4) = \beta(-\tfrac{7}{5} + 2, -\tfrac{14}{5} + 3, -\tfrac{-21}{5} + 4) = \beta(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}).$$

Por conseguinte, tomando $t = \frac{1}{5}\beta$, tem-se

$$U \cap V = \{t(3,1,-1) \colon t \in \mathbb{R}\} = \langle (3,1,-1) \rangle.$$

Note-se que a sequência $((3,1,-1))$ é base de $U \cap V$ porque o gerador é não nulo.

5.4. Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$.

Como U, V são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, uma maneira expedita de mostrar a igualdade consiste em usar o teorema das dimensões:

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V), \tag{$*$}$$

uma vez que já se sabe por 5.2 que $\dim U = 2$ e por 5.3 que $\dim(U \cap V) = 1$. Falta calcular uma base de V para saber $\dim V$. Da equação definidora de V tem-se

$$2x + 3y + 9z = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{3}{2}y - \tfrac{9}{2}z.$$

Subsistindo x em $(x, y, z) \in V$, tem-se

$$(-\tfrac{3}{2}y - \tfrac{9}{2}z, y, z) = (-\tfrac{3}{2}y, y, 0) + (-\tfrac{9}{2}z, 0, z) = y(-\tfrac{3}{2}, 1, 0) + z(-\tfrac{9}{2}, 0, 1).$$

Tomando $\alpha = 2y$ e $\beta = 2z$ resulta que

$$V = \{\alpha(-3, 2, 0) + \beta(-9, 0, 2) \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle(-3, 2, 0), (-9, 0, 2)\rangle.$$

Como a sequência $((-3, 2, 0), (-9, 0, 2))$ é linearmente independente [nenhum dos dois vetores é múltiplo do outro] e gera V, então é base de V. Logo $\dim V = 2$. Substituindo o valor das dimensões em $(*)$, obtém-se

$$\dim(U+V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Visto que $U + V \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U + V) = 3$, então $U + V = \mathbb{R}^3$.

Maneira alternativa sem usar o teorema das dimensões.
Por 5.2 $U = \langle(1, 2, 3), (2, 3, 4)\rangle$ e $V = \langle(-3, 2, 0), (-9, 0, 2)\rangle$ pelos cálculos acima efetuados, logo $U + V = \langle(1, 2, 3), (2, 3, 4), (-3, 2, 0), (-9, 0, 2)\rangle$. Considerando a matriz cujas linhas são os geradores de $U+V$ e aplicando transformações elementares sobre as linhas tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 + 3\ell_1 \\ \ell_4 + 9\ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 18 & 29 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_3 + 8\ell_2 \\ \ell_4 + 18\ell_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 - \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela proposição 4.20 [p. 204, 6ª edição], $U + V = \langle(1, 2, 3), (0, -1, -2), (0, 0, -7)\rangle$ e pela proposição 4.27 [p. 213] a sequência $((1, 2, 3), (0, -1, -2), (0, 0, -7))$ é linearmente independente, pois a matriz cujas linhas são os vetores $(1, 2, 3)$, $(0, -1, -2)$, e $(0, 0, -7)$ já está em escada e todas as linhas têm pivô. Assim, a sequência $((1, 2, 3), (0, -1, -2), (0, 0, -7))$ é base de $\mathbb{R}^3$ e por isso $U + V = \mathbb{R}^3$.