$\boxed{21082}$ - Relatório da Actividade Formativa 3

I - Escolha múltipla

Grelha de Correção

1. - a) **2.** - a) **3.** - d) **4.** - b)

Justificação

1. A afirmação verdadeira é a **a)**. De facto, da segunda equação resulta que $a_{n-1} = -b_n + 3b_{n-1}$. Substituindo na primeira equação vem $-b_{n+1} + 3b_n = b_{n-1} - 2(-b_n + 3b_{n-1})$ e, portanto,

$$b_{n+1} = b_n + 5b_{n-1},$$

para todo $n \geq 1$.

Note que os primeiros 5 termos de cada uma destas sucessões são:

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -1 \ , \ a_2 = 4 \ , \ a_3 = -1 \ , \ a_4 = 19 \ , \ a_5 = 14 \ ,$$

$$b_0 = 1 \ , \ b_1 = 2 \ , \ b_2 = 7 \ , \ b_3 = 17 \ , \ b_4 = 52 \ , \ b_5 = 137 \ ,$$

pelo que b), c) , d) são afirmações falsas.

2. A afirmação verdadeira é a **a)**, porque (i) e (ii) são ambas verdadeiras.

(i) Temos que $7^1 - 2^1 = 5$, $7^2 - 2^2 = (7-2)(7+2) = 5 \cdot 9$, $7^3 - 2^3 = (7-2)(7^2 + 2 \cdot 7 + 2^2)$ $= 5 \cdot 67$. Mais geralmente,

$$7^n - 2^n = (7-2)(7^{n-1} + 2 \cdot 7^{n-2} + 2^2 \cdot 7^{n-3} + \cdots + 2^{n-2} \cdot 7 + 2^{n-1})$$

- para uma demonstração rigorosa podemos recorrer ao método de indução matemática. Logo, $7^n - 2^n = 5k$ com $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $7^n - 2^n$ é múltiplo de 5.

(ii) Temos que $u_0 = 0$, $u_1 = 7 - 2 = 5$, pelos que os dois primeiros termos das sucessões u_n e v_n coincidem. Além disso

$$\begin{aligned} & 9 \cdot (7^{n-1} - 2^{n-1}) - 14 \cdot (7^{n-2} - 2^{n-2}) \\ =& (7+2) \cdot 7^{n-1} - (7+2) \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 7 \cdot 7^{n-2} + 2 \cdot 7 \cdot 2^{n-2} \\ =& 7^n + 2 \cdot 7^{n-1} - 7 \cdot 2^{n-1} - 2^n - 2 \cdot 7^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} = 7^n - 2^n. \end{aligned}$$

Logo $\langle u_n \rangle$ satisfaz a relação de recorrência linear $x_n = 9x_{n-1} - 14x_{n-2}$, $n \geq 2$, sujeita às condições iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 5$. Segue-se que $\langle u_n \rangle$ coincide com $\langle v_n \rangle$.

3. A afirmação verdadeira é a **d)**. Por definição $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ é uma solução da relação de recorrência linear $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$ se λ_1 e λ_2 são as raízes do polinómio característico da recorrência. Portanto, neste caso, como $a_n = 2^n + 3(-1)^n$ vem que $\alpha = 1$, $\beta = 3$ e que $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

4. Para $n = 1$, a única sequência de comprimento 1 que termina em 1 é: 1 - donde $a_1 = 1$. Para $n = 2$ as sequências que terminam em 1 são: 01 e 11 - donde $a_2 = 2$. Assim as afirmações **a)** e **c)** são falsas. Agora suponhamos $n \geq 2$. Uma sequência de comprimento n ou começa por 0 e a seguir tem de vir 1, porque não pode ocorrer um bloco 00, ou começa por 1:

$$\underline{\mathbf{0}}\ \underline{1}\ \underbrace{\_\ \cdots\ \_}_{a_{n-2}} \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbf{1}}\ \underbrace{\_\ \_\ \cdots\ \_}_{a_{n-1}}.$$

Portanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e **b)** é verdadeira.

II - Problemas

5. a) O caso base é verdadeiro, pois temos $d_0 = 1 = 0! \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}$.

Escolhido e fixado um $n \in \mathbb{N}$, admitamos que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{(Hipótese de Indução)}$$

Provemos que

$$d_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \quad \text{(Tese de Indução)}$$

Passo de Indução: Tem-se

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)d_n + 1 = (n+1)\left(n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1 \qquad \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 1 = (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + (n+1)! \frac{1}{(n+1)!} \\ &= (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

com o que fica provada a tese de indução.

Pelo método de indução matemática fica então provada a igualdade do enunciado para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Aplicando o método da substituição de diante para trás, obtemos

$$\begin{aligned} d_n &= nd_{n-1} + 1 = n((n-1)d_{n-2} + 1) + 1 = n(n-1)d_{n-2} + n + 1 \\ &= n(n-1)((n-2)d_{n-3} + 1) + n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2)d_{n-3} + n(n-1) + n + 1 = \cdots \\ &= (n(n-1)\cdots 2 \cdot 1)d_0 + (n(n-1)\cdots 3 \cdot 2) + \cdots + n(n-1) + n + 1 \\ &= n! + (n(n-1)\cdots 3 \cdot 2) + \cdots + n(n-1) + n + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \underset{k \rightsquigarrow n-k}{=} n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

6. a) Estando-se no estado 2, há duas possibilidades de ir para o estado 1 e três possibilidades de obter directamente a solução (i.e., ir para o estado 0). Logo, $a_2 = 2a_1 + 3 = 7$.

b) Claramente,

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

O polinómio característico desta fórmula de recorrência é $p(t) = t^2 - 2t - 3$, cujas soluções são -1 e 3. Logo, a_n é da forma

$$a_n = \alpha(-1)^n + \beta 3^n.$$

Calculam-se os valores das incógnitas de modo a que $a_1 = 2$ e $a_2 = 7$. Ficamos com o sistema: $-\alpha + 3\beta = 2$ e $\alpha + 9\beta = 7$, cuja solução é $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{3}{4}$. Logo, $a_n = \frac{1}{4}((-1)^n + 3^{n+1})$.

7. O polinómio característico, da recorrência dada, é $p(t) = t^2 - t + 1 = (t - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})(t - \frac{1-\sqrt{3}i}{2})$, pelo que a solução geral é dada por $a_n = \alpha(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^n$, $n \geq 0$, para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dado que $a_0 = 2$ e $a_1 = 4$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\,\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} + \beta\,\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \underbrace{(\alpha+\beta)}_{2}\dfrac{1}{2} + (\alpha - \beta)\dfrac{\sqrt{3}i}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ (\alpha - \beta)\sqrt{3}i = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = -2\sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \sqrt{3}i \\ \beta = 1 + \sqrt{3}i \end{cases}.$$

A solução da relação de recorrência é, pois,

$$\begin{aligned} a_n &= (1-\sqrt{3}i)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + (1+\sqrt{3}i)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^n + (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Temos que $(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 4$. Por outro lado, $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ e $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, donde

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right),\ 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right).$$

Segue-se, para $n \geq 0$, que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4\left((1+\sqrt{3}i)^{n-1} + (1-\sqrt{3}i)^{n-1}\right)}{2^n} \\ &= \frac{4 \cdot 2^{n-1}\left(\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^{n-1} + \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}\right)}{2^n} \\ &= 2\left(\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{(n-1)\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\right) \\ &= 4\cos\frac{(n-1)\pi}{3}. \end{aligned}$$

8. a) Temos que $a_1 = 3b_0 - a_0 = -4$, $b_1 = b_0 + a_0 = 4$, $a_2 = 3b_1 - a_1 = 16$ e $b_2 = b_1 + a_1 = 0$.

b) As sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ são definidas pelo sistema de recorrências

$$\begin{cases} a_n = 3b_{n-1} - a_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}.$$

Da segunda equação, obtemos $a_{n-1} = b_n - b_{n-1}$. Logo também $a_n = b_{n+1} - b_n$. Substituindo na primeira equação, vem $b_{n+1} - b_n = 3b_{n-1} - b_n + b_{n-1}$ ou seja $b_{n+1} = 4b_{n-1}$ e, portanto

$$b_n = 0b_{n-1} + 4b_{n-2} \quad \text{e} \quad b_0 = 0, b_1 = 4.$$

Temos, assim, uma fórmula de recorrência para a sucessão $\langle b_n \rangle$, cujo polinómio característico é

$$p(t) = t^2 - 4 = (t-2)(t+2).$$

As soluções desta fórmula de recorrência são da forma $b_n = \alpha 2^n + \beta(-2)^n$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $b_0 = 0$ e $b_1 = 4$. Assim, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

obtemos a solução $b_n = 2^n - (-2)^n = 2^n(1 - (-1)^n) = 2^n(1 + (-1)^{n+1})$. Segue-se que

$$a_n = b_{n+1} - b_n = 2^{n+1} - (-2)^{n+1} - 2^n + (-2)^n = 2^n(1 + 3(-1)^n).$$

9. a) Temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{logo } a_1 = 0\,,\, b_1 = 1;$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{logo } a_2 = 2\,,\, b_2 = 1;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{logo } a_3 = 2\,,\, b_3 = 3.$$

No caso geral

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{bmatrix} &= A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2b_n & a_n + b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & 2b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n + b_n & 2b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto, $\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

b) Temos

$$\boxed{b_{n+1}} = a_n + b_n = 2b_{n-1} + b_n = \boxed{b_n + 2b_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Por outro lado,

$$\boxed{a_{n+1}} = 2b_n = 2(a_{n-1} + b_{n-1}) = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} = 2a_{n-1} + a_n = \boxed{a_n + 2a_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

c) Como $b_{n+1} = b_n + 2b_{n-1}$, para $n \geq 2$ então o polinómio característico associado a esta relação de recorrência é:

$$p(t) = t^2 - t - 2.$$

Temos
$$p(t) = 0 \iff t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 0 \iff t = -1 \vee t = 2.$$
Assim, a solução tem termo geral
$$b_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n, \quad \text{para alguns } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Temos $b_1 = 1$ e $b_2 = 1$, logo
$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + 4\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1/3 \\ \beta = 1/3 \end{cases}.$$
Portanto
$$b_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$
Assim,
$$a_n = \begin{cases} 2b_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \\ 0 & \text{se } n = 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} & \text{se } n \geq 2 \\ 0 & \text{se } n = 1 \end{cases} = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

FIM