



# Computação Numérica 21180

## Tema

Introdução ao Cálculo Numérico

## Trabalho a desenvolver

Resolver os exercícios propostos, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

## Recursos

Material indicado na plataforma, nomeadamente:

- M. R. Valença, *Análise Numérica*

## CrITÉRIOS de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações: rigor científico, clareza, justificação e completude das respostas dadas. A cotação total deste e-Fólio Global é de **12 valores**, sendo distribuídos por questão da seguinte forma:

1. Questão 1= 4.0 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
  - (a) 1.0 valores
  - (b) 1.0 valores
  - (c) 2.0 valores
2. Questão 2= 5.0 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
  - (a) 0.5 valores
  - (b) 2.0 valores
  - (c) 0.5 valores
  - (d) 2.0 valores
3. Questão 3= 3.0 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:

(a) 1.5 valores

(b) 1.5 valores

Total: 12.0 valores

### **Normas a respeitar**

Deve submeter um único documento em formato pdf com sua resolução dos problemas da prova.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-folio Global e do código da disciplina, segundo o exemplo apresentado: 000000efolio-21180.zip

Só serão aceites submissões efetuadas na plataforma, através do dispositivo para esse efeito.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

Esta prova tem a duração de 90 minutos, aos quais acresce um período de tolerância de 60 minutos. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Pedro Antunes

1. **[4.0 val.]** Considere a função  $f(x) = e^{-x} \sin(x)$ .

(a) **[1.0 val.]** Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 de  $f$  em torno do ponto  $x_0 = 0$ .

(b) **[1.0 val.]** Recorrendo ao polinómio de Taylor obtido na alínea a) calcule uma aproximação de  $f(0.1)$  e o respetivo erro absoluto.

**Observação** - Se não resolveu a alínea a) e só nesse caso considere  $p_2(x) = \frac{11}{10}(x - x^2)$ ,

(c) **[2.0 val.]** Determine um valor de  $\alpha > 0$  tal que consiga garantir que

$$\max_{x \in [-\alpha, \alpha]} |f(x) - p_2(x)| < 10^{-5},$$

onde  $p_2$  é o polinómio determinado na alínea a).

2. **[5.0 val.]** Considere a seguinte equação não linear

$$6e^{-x} + 5x^2 - 10x = 0. \quad (1)$$

(a) **[0.5 val.]** Seja  $g(x) = \frac{3}{5}e^{-x} + \frac{x^2}{2}$ . Mostre que  $x$  é raiz da equação (1) se e só se  $x$  é ponto fixo da função  $g$ .

(b) **[2.0 val.]** Prove que a sucessão

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \dots$$

converge para a única raiz de (1) no intervalo  $I := [0, 1]$ , qualquer que seja  $x_0 \in I$ .

(c) **[0.5 val.]** Calcule as iterações  $x_1$  e  $x_2$  obtidas pelo método do ponto fixo definido na alínea anterior, tomando  $x_0 = 1$ .

(d) **[2.0 val.]** Determine o número de iterações que lhe permitiriam garantir uma aproximação com erro absoluto inferior a  $10^{-6}$ . Não é necessário calcular essas iterações.

3. **[3.0 val.]** Considere o sistema de equações lineares  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) **[1.5 val.]** Calcule a fatorização  $A = LU$ .

(b) **[1.5 val.]** Resolva o sistema linear, usando a fatorização obtida na alínea anterior.

FIM