UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21180

Computação Numérica

21 de fevereiro de 2020

INSTRUÇÕES

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução da prova.
- O enunciado da prova é constituído por 4 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Se o seu exemplar não estiver completo ou nele se verificar qualquer outra deficiência, por favor dirija-se ao professor vigilante.
- A prova deve ser resolvida na sua totalidade em folhas de respostas.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível.
- Todas as respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- A prova é SEM CONSULTA. Todos os elementos necessários à resolução são fornecidos no enunciado.
- Para a execução da prova é INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- As cotações são indicadas por grupo e nas próprias questões.
- As respostas devem ser claras, indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Nas questões de escrita de programas, a sua correção terá em conta critérios de proficiência e compreensibilidade do código (legibilidade, indentação, estrutura, comentários e explicação geral).
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização da prova é de 150 minutos.

Grupo I [4 valores]

1. Considere que para um determinado problema matemático se determinou a solução aproximada $\bar{x} = 0.35273$.

1.1. [0.5] Comente a utilidade da solução aproximada tendo em conta apenas a informação dada no cabeçalho.

1.2. [2] Considere que a solução aproximada dada tem 5 algarismos significativos (AS). Determine limites superiores ϵ_{LS}, r_{LS} respetivamente para os erros absoluto $\epsilon \leq \epsilon_{LS}$ e relativo $r \leq r_{LS}$. Os limites devem ser os menores possíveis.

1.3. Obtenha por arredondamento novas aproximações com o número de AS indicado. Justifique.

1.3.1. [0.75] 3 AS.

1.3.2. [0.75] 2 AS.

Grupo II [4 valores]

2. Considere a seguinte equação,

$$\ln(1 + x) = x - 0.1$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [0, 1].

2.2. [2] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando quatro iterações do método da bissecção, a partir do intervalo inicial $a_0 = 0, b_0 = 1$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, a_k, b_k, x_k, f(x_k)$, sinais de $f()$, para $k = 0, 1, 2, 3$.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

2.4. [0.5] Indique quantas iterações seriam necessárias para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-3}.

Grupo III [4 valores]

3. Considere a matriz A e o vetor b seguintes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

3.1. [2] Determine a fatorização de Cholesky LL^T de A.

3.2. [2] Resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$ com $x = [x_1 \; x_2 \; x_3]^T$ utilizando a fatorização encontrada na alínea anterior.

Grupo IV [8 valores]

4.1. [1.5] Apresente um pequeno programa em Octave, com um único ciclo, que crie a matriz A a partir da concatenação de vetores coluna. Utilize os operadores e funções que achar necessários para a criação dos vetores(não devem ser criados elemento a elemento).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & & 19 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & \dots & 19 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 5 & 7 & & 19 \end{bmatrix}$$

4.2. [1.5] Considere as funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 1 + 3x$. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções $f(x)$ e $g(x)$, com $f(x)$ para x de -1 a 1 com intervalos de 0.02, $g(x)$ para x de 0 a 1 com intervalos de 0.01 e com as seguintes características:

- $f()$ a traço contínuo de cor azul, com legenda;
- $g()$ a ponteado de cor verde, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (0.75, 0.75) deve ser assinalado com um marcador tipo cruz, de cor vermelha;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta "x";
- o título do gráfico deve ter a etiqueta "$f(x), g(x)$".

4.3. [5] Escreva uma função em Octave `[r,e]=sqrtsec(a,emax)` que aceite um nº positivo a como argumento e que recorrendo ao método da secante determine e retorne o valor da sua raiz quadrada positiva $r = +\sqrt{a}$. A função aceita também como segundo argumento um valor máximo para o erro $emax$ e retorna o erro e da raiz determinada. Dica: Encontre uma função $f(x)$ tal que a solução de $f(x) = 0$ seja a raiz desejada.

FORMULÁRIO

Fatorização $A = LU$

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/u_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} u_{k,j} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k} u_{k,i})/u_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fatorização (Cholesky) $A = LL^T$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/l_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} l_{j,k})/l_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

FIM