

1 - Matrizes

1.1 - Definições

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. A é uma **matriz linha** se $m=1$, A é uma **matriz coluna** se $n=1$, A é uma **matriz quadrada** se $m=n$, e neste caso diz-se que A é uma matriz de ordem n .

1.2 - Operações com matrizes

1.2.1 - Soma

Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz soma** da matriz A com a matriz B , e denotamos $A+B$, à matriz de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i, j) é $A_{i,j} + B_{i,j}$, isto é

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{i,j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

A adição em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tem propriedades idênticas às da adição em $\mathbb{K}$:

1. $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad A + B = B + A$ (comutatividade da adição em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$).
2. $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad (A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade da adição em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$).
3. $\exists Z \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad A + Z = A = Z + A$ (existência do elemento neutro da adição em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$).
4. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \exists V \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad A + V = Z = V + A$ sendo Z o elemento neutro para a adição em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ (existência de oposto, para a adição, de qualquer $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$).

1.2.2 – Produto de um escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto do escalar α pela matriz A** , e denotamos por αA à matriz de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i, j) é $\alpha A_{i,j}$, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1A = A$
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ e, em particular, $(-1)A = -A$.
6. Se $\alpha A = 0_{m \times n}$ então $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m \times n}$.

1.2.3 – Produto de matrizes

Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto** da matriz A pela matriz B , e representamos por AB , à matriz de $M_{m \times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = A_{ij}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \text{ com } i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, p$$

A multiplicação de matrizes goza das propriedades seguintes:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição)
 $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição).
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$
4. $AI_n = A = I_n A$

Algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. Em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, a multiplicação de matrizes não é comutativa;
2. Existem matrizes A e B tais que $AB=0$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;
3. Existem matrizes A, B, C tais que:
 $A \neq 0$ e $AB = AC$, com $B \neq C$,
 $BA = CA$ e $A \neq 0$, com $B \neq C$

A multiplicação de matrizes não é comutativa, contudo podem existir matrizes $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tais que $AB = BA$. Neste caso dizemos que A e B são **comutáveis** ou que A e B **comutam**. É o que sucede se considerarmos $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ arbitrária e tomarmos, por exemplo $B = 0_{n \times n}$ ou $B = I_n$ ou $B = A$.

Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Chamamos **potência de expoente k** de A, e representamos por A^k , à matriz de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que :

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.3 - Matrizes Invertíveis

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **invertível**, ou que A tem inversa, se existir uma matriz $B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $AB=I_n = BA$. A esta matriz chama-se inversa e representa-se por A^{-1} .

Ver 3.5 – Cálculo da inversa a partir da adjunta $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$ e $\text{adj} A = \hat{A}^T$

1.4 - Transposição e conjugação de matrizes

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **transposta** de A e representa-se por A^T , à matriz $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $(A^T)_{ij} = A_{ji}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$.

Propriedades da transposição:

- a) $(A^T)^T = A$
- b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

- c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
 d) $(AB)^T = B^T A^T$
 e) $(A^k)^T = (A^T)^k, \forall k \in \mathbb{N}$
 f) Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Uma matriz $A \in M_p(\mathbb{K})$ diz-se **ortogonal** se $A^T A = I_n = A A^T$ e **hemiortogonal** se $A^T A = -I_n = A A^T$

Diz-se que uma matriz A é **simétrica** se $A^T = A$ e que é **hemisimétrica** se $A^T = -A$.

Só podem ser simétricas ou hemisimétricas as matrizes quadradas.

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Chamamos **conjugada** $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ de A , e representa-se por $\overline{A}$, à matriz de $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ que se obtém de A substituindo cada elemento de A pelo seu conjugado, isto é,

$$(\overline{A}) = \overline{A_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n.$$

Propriedades das matrizes conjugadas:

- a) $\overline{\overline{A}} = A$
 b) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
 c) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \overline{A}$
 d) $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$
 e) $\overline{a^k} = (\overline{A})^k$
 f) Se $m=n$ e A é uma matriz invertível então $\overline{A}$ é invertível $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
 g) $(\overline{A})^T = \overline{A^T}$

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Chamamos **transconjugada** de A , e representamos por A^* , à matriz $(\overline{A})^T$.

Dizemos que uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ é **hermítica** se $A^* = A$, ou equivalente, se $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$, $i, j = 1, \dots, n$ e que é **semi-hermítica** se $A^* = -A$ ou equivalente, se $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$, $i, j = 1, \dots, n$.

1.5 – Transformações e matrizes elementares

Transformação elementar sobre as linhas de A é uma transformação de um dos seguintes tipos:

1. Troca de posição, na matriz A , da linha i com a linha j , com $i \neq j$. Representa-se $l_i \rightarrow l_j$.
2. Multiplicação de uma linha de A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Representa-se por αl_i .
3. Substituição da linha i de A pela sua soma com a linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$ com $j \neq i$. Representa-se por $l_i + \beta l_j$.

Chamamos **matriz elementar** de $M_{n \times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n efectuando uma única transformação elementar sobre as linhas, de tipo I, II ou III, respectivamente.

Pode-se efectuar qualquer transformação elementar sobre as linhas de uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ premultiplicando A pela matriz que resulta de I_m efectuando sobre as suas linhas a mesma transformação que pretendemos operar em A .

1.6 - Formas de escada e característica de uma matriz

Chama-se **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha. Uma linha nula não tem pivô.

Pivôs de uma matriz são todos os pivôs das suas linhas não nulas.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. A está em **forma de escada (f.e.)** se $A=0_{m \times n}$ ou se os pivôs da matriz A estão nas linhas $1, \dots, s$, nas posições $(1, k_1), \dots, (s, k_s)$, com $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq n$.

Para reduzir uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ à forma de escada:

1. Se $A=0_{m \times n}$ ou A é uma matriz linha então A está na forma de escada e o processo termina;
2. Por troca de linhas (transformação elementar de tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas de A , um pivô com índice de coluna mínimo.
3. Para cada linha i de B com $i=2, \dots, m$ substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-B_{it}/B_{1t}$ pela linha 1 (transformação tipo III).
4. Despreze-se a linha 1 da matriz obtida anteriormente e repete-se o processo.

Diz-se que uma matriz está em **forma de escada reduzida (f.e.r.)** se simultaneamente a matriz está em forma de escada e se os seus pivôs, quando existem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Processo de redução de uma matriz não nula e em forma de escada à forma de escada reduzida:

1. Seja A_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para garantir que o pivô da linha s passa a 1, multiplica-se a linha s por $1/A_{sk}$ (transformação elementar do tipo II). Seja B a matriz resultante. Se $s=1$ a matriz está em forma de escada reduzida e o processo termina.
2. Para cada linha i de B , com $i=1, \dots, s-1$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-B_{ik}$ pela linha s (transformações elementares do tipo III). (Corresponde a anular os elementos da coluna do pivô B_{sk} , com índice de linha inferior ao pivô).

Obtém-se uma nova matriz C que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna k são todas nulas à excepção do pivô C_{sk} que é igual a 1.

3. “Desprezam-se” as linhas de C de índice superior ou igual a s e aplica-se o processo à matriz resultante.

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. A única matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada reduzida chama-se **forma de escada reduzida** de A ou **forma de Hermite** de A .

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada chama-se **característica** de A e denota-se por $r(A)$ (do inglês **rank**).

As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica. Isto é se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $A \xrightarrow{(linhas)} B$ então $r(A)=r(B)$, ou seja matrizes equivalentes por linhas têm a mesma característica.

As matrizes $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ são equivalentes por linhas se, e só se, tiverem a mesma forma de escada

reduzida.

1.7 - Características das matrizes invertíveis

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

1. A é invertível;
2. $r(A)=n$;
3. I_n é a forma de escada reduzida de A ;
4. A é igual a um produto de matrizes elementares.
5. $\det A \neq 0$ (ponto 3.3)

Ao efectuar transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n a partir de A (o que corresponde a transformar A na sua forma de escada reduzida), se a Partir de I_n , efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas (isto é, as mesmas transformações e pela mesma ordem) a matriz resultante é A^{-1} .

Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. A matriz AB é invertível se, e só se A e B são ambas invertíveis. Se $AB=I_n$ então A e B são invertíveis e $A^{-1} = B$ e $BA=I_n$.

2 - Sistema de Equações lineares

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, \dots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, com $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$. $a_1, \dots, a_n$ são os **coeficientes** da equação e b o **termo independente** da equação. Se $b=0$ então a equação diz-se **homogénea**.

Diz-se que $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação ou que **satisfaz** a equação se substituindo x_i por β_i , $i=1, \dots, n$, se obtém uma proposição verdadeira, isto é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é solução da equação se é verdadeira a proposição $a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n = b$.

Sistema de equações homogéneo é o sistema em que todas as equações são homogéneas.

Num sistema de equações lineares (S) $AX=B$, com $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução de

$$(S) \text{ se, e só se, } A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B$$

Sejam (S) e (S') sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que (S) e (S') são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto de soluções.

Seja $AX=B$ um sistema de equações lineares. Se $[A|B]$ e $[A'|B']$ são equivalentes por linhas, isto é se $[A|B] \xrightarrow{(linhas)} [A'|B']$ então os sistemas $AX=B$ e $A'X=B'$ são equivalentes.

Seja $AX=B$ um sistema de equações lineares possível e indeterminado, com $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Ao número de **incógnitas livres**, isto é, a $n-r(A)$, chama-se **grau de indeterminação** do sistema.

$$AX=B \begin{cases} r(A) < r([A|B]) \\ \text{Sistema impossível} \\ r(A) = r([A|B]) \begin{cases} r(A) = r([A|B]) = n \\ \text{Sistema Possível Determinado} \\ r(A) = r([A|B]) < n \\ \text{Sistema Possível Indeterminado} \\ \text{Com Grau de indeterminação } n-r(A) \end{cases} \end{cases}$$

Dizemos que um sistema de equações lineares $AX=B$ é um **sistema de Cramer** se A é quadrada e invertível.

3 – Determinantes

3.1 – Definição

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, chamamos **determinante** de A , e representa-se por $\det A$ ou $\|A\|$ ao elemento de $\mathbb{K}$ definido da seguinte forma:

1. Se $n=1$ então $\det A = A_{11}$;
2. Se $n>1$ então $\det A = \sum_{k=1}^n A_{1k}(-1)^{1+k} \det A(1 | k)$.

Uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível se e só se o determinante de A for não nulo.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Dados $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ representamos por $A(i | j)$ a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j de A .

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A e representa-se por $\det A$ ou $|A|$, ao elemento de $\mathbb{K}$ definido, por recorrência da seguinte forma:

- Se $n=1$ então $\det A = A_{11}$;
- Se $n>1$ então $\det A = A_{11}(-1)^1 \det A(1 | 1) + \dots + A_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1 | n) = \sum_{k=1}^n A_{1k}(-1)^{1+k} \det A(1 | k)$.

O determinante de uma matriz de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

O determinante de uma matriz de ordem 3 é uma diferença de 6 parcelas em que o aditivo tem 3 parcelas e o subtractivo tem outras 3 parcelas. O determinante desta matriz pode ser calculado pela **regra de Sarrus** que diz que as parcelas do aditivo são dadas pelo produto dos elementos da diagonal principal e pelos produtos dos elementos abrangidos pelos triângulos com base paralela à diagonal principal. As parcelas do subtractivo obtêm-se da mesma forma com base na diagonal secundária.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ com $n \geq 2$. Designa-se por **complemento algébrico** e representa-se por $\hat{A}$, o escalar $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i | j)$ em que $A(i | j)$ é a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j .

Teorema de Laplace. Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ com $n \geq 2$. O determinante de A é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma qualquer linha de A pelos complementos algébricos das respectivas posições, isto é:

$$\det A = A_{1i} \hat{A}_{i1} + \cdots + A_{in} \hat{A}_{in}$$

3.2 - Propriedades dos determinantes

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tem uma linha nula então $\det A = 0$.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se A tem a linha i igual à linha j , com $i \neq j$, então $\det A = 0$.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se que $\det A = \det A^T$, ou seja que uma matriz e a sua transposta têm o mesmo determinante.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) então o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A .

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Se os elementos da linha i da A são da forma $A_{ik} = B_{ik} + C_{ik}$ com $k = 1, \dots, n$, então

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ B_{i1} + C_{i1} & \cdots & B_{in} + C_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ B_{i1} & \cdots & B_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ C_{i1} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

3.3 - Transformações elementares e determinantes

Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se:

- Se $i \neq j$ e $A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} B$ então $\det B = -\det A$;
- $\alpha \neq 0$ e $A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B$ então $\det B = \alpha \det A$;
- Se $i \neq j$ e $A \xrightarrow[l_i + \beta l_j]{} B$ então $\det B = \det A$.

Numa linguagem informal diz-se que num determinante um escalar pode ser posto em evidência só por estar a multiplicar por uma linha (ou coluna). Ou seja, como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow [2l_1] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = B \text{ então } \det B = 2 \cdot \det A.$$

Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Se $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$, então $\det A = 0$ se, e só se, $\det B = 0$.

Processo para calcular o determinante de uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$:

- Efectuam-se as transformações lineares sobre as linhas de A de forma a transformar a matriz A numa matriz A' em forma de escada.
- Considerando as correspondentes alterações no determinante resultantes de cada uma dessas transformações elementares, obtenha-se a relação entre o $\det A$ e $\det A'$.
- Como $\det A'$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal e é conhecida a relação entre $\det A$ e $\det A'$, obtém-se então o valor de $\det A$.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se que A é invertível se, e só se, $\det A \neq 0$.

3.4 - Determinante do produto de matrizes

Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível, ou equivalentemente uma matriz tal que $\det A \neq 0$. Tem-se

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

3.5 – Cálculo da inversa a partir da adjunta

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Chamamos **matriz dos complementos algébricos** de A, e representa-se por $\hat{A}$, à matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo complemento algébrico da respectiva posição.

Chamamos **adjunta** de A, e representa-se por $\text{adj } A$, à transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é $\text{adj } A = \hat{A}^T$.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então

$$A_{i1}\hat{A}_{j1} + A_{i2}\hat{A}_{j2} + \dots + A_{in}\hat{A}_{jn} = 0$$

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Tem-se:

$$1. \quad A \cdot \text{Adj } A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I_n$$

$$2. \quad \text{Se } A \text{ é invertível então } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

3.6 – Regra de Cramer

(Regra de Cramer) Seja $AX=B$ um sistema de equações lineares, com $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertível. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, seja $A_{(j)}$ a matriz que se obtém de A substituindo a coluna j pela coluna de B. A única solução do sistema anterior é o n-uplo $\left(\frac{\det A_{(1)}}{\det A}, \dots, \frac{\det A_{(n)}}{\det A}\right)$.

Só tem interesse aplicar este método de resolução em sistemas com valores pequenos de n , sendo preferível utilizar o método de resolução do capítulo 2.

3.7 – Outra definição de determinante

Seja $n \in \mathbb{N}$. chamamos **permutação** de $1, \dots, n$ a qualquer aplicação bijectiva de $1, \dots, n$ em $1, \dots, n$ e

representamos por S_n o conjunto de todas as permutações de $1, \dots, n$. Existem $n!$ permutações de $1, \dots, n$. Numa permutação σ , uma **inversão** é um par $(\sigma(i), \sigma(j))$ tal que $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$. Representamos número de inversões de σ por $\eta(\sigma)$.

Dada uma permutação σ de $1, \dots, n$ um procedimento simples para calcular o número de inversões de σ é o seguinte:

- Para cada elemento de $\sigma(k)$ da permutação, efectue-se a contagem do número de elementos à sua direita e inferiores a $\sigma(k)$. Representa-se tal número por s_k .
- Tem-se $(\sigma) = s_1 + \dots + s_n$.

Diz-se que uma permutação σ é **par** (respectivamente **ímpar**) se $\eta(\sigma)$ é um número par (respectivamente ímpar).

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$:

1. Considerem-se todos os produtos do tipo $A_{i_1 j_1} \dots A_{i_n j_n}$ sendo $(i_1, \dots, i_n)$ e $(j_1, \dots, j_n)$ permutações de $1, \dots, n$, isto é todos os produtos possíveis de n elementos da matriz de forma a que em cada produto figurem um, e um só, elemento de cada linha e um, e um só, elemento de cada coluna de A .
2. Afecte-se, cada um dos produtos obtidos em 1, do sinal “+” se as permutações $(i_1, \dots, i_n)$ e $(j_1, \dots, j_n)$ têm a mesma paridade e do sinal “-” no caso contrário.

Designamos por **determinante** de A , e representa-se por $\det A$ ou $|A|$, a soma dos escalares obtidos em 2.

Assim
$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\eta(\sigma)} A_{\sigma(1)1} \dots A_{\sigma(n)n}.$$

O **teorema de Laplace** diz-nos que o determinante de A é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de qualquer linha de A pelos complementos algébricos das respectivas posições.

O mesmo é válido para as colunas

$$\det A = A_{i1} \widehat{A_{i1}} + \dots + A_{in} \widehat{A_{in}}$$

4 – Espaços vectoriais

4.1 – Definição e propriedades

Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Consideremos definidas duas operações:

- Uma a que designamos por **adição** em E e representamos por $+$. que é uma operação binária, isto é, associa a cada par (u, v) de elementos de E um, e um só, elemento de E que representamos por $u+v$.
- Uma operação, que designamos por **multiplicação externa** e representamos por $\cdot$, que a cada par (α, u) , com $\alpha \in \mathbb{K}$, e $u \in E$, associa um, e um só, elemento de E que denotamos por αu .

Dizemos que E , com estas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ ou que $(E, +, \cdot)$ é um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$ se:

1. A adição interna $\oplus$ tem as seguintes propriedades:

$$(A_1) \forall_{u,v \in E} u \oplus v = v \oplus u, \text{ comutativa}$$

$$(A_2) \forall_{u,v,w \in E} (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w), \text{ associativa}$$

$$(A_3) \exists_{0_E \in E} \forall_{u \in E} u \oplus 0_E = u = 0_E \oplus u, \text{ elemento neutro}$$

$$(A_4) \forall_{u \in E} \exists_{u' \in E} u \oplus u' = 0_E = u' \oplus u, \text{ elemento simétrico}$$

2. A multiplicação externa $\otimes$ tem as seguintes propriedades:

- $(M_1) \forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \forall_{u,v \in E} \alpha \otimes (u + v) = \alpha \otimes u \oplus \alpha \otimes v$, distributiva $\otimes$ em $\oplus$
- $(M_2) \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{K}} \forall_{u \in E} (\alpha + \beta) \otimes u = \alpha \otimes u \oplus \beta \otimes u$, distributiva $\oplus$ em $\otimes$
- $(M_3) \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{K}} \forall_{u \in E} (\alpha \cdot \beta) \otimes u = \alpha \otimes (\beta \otimes u)$ associativa mista
- $(M_4) \forall_{u \in E} \exists 1_{\mathbb{K}} 1 \otimes u = u$ Elemento neutro

Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Aos elementos de E chamamos **vectores**. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que E é um **espaço vectorial complexo** e se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que é um **espaço vectorial real**.

Seja E um conjunto não vazio e $+$ uma operação binária em E com as propriedades (A_1) a (A_4) . Tem-se:

1. O elemento neutro da adição é único (Habitualmente representado por 0_E).
2. Para cada $u \in E$, o oposto de u , para a adição, é único (O oposto, para a adição, de $u \in E$ é representado por $-u$).
3. Se $u, v, w \in E$ são tais que $u + v = u + w$ então $v = w$. (Lei do corte, à esquerda).
4. Se $u, v, w \in E$ são tais que $v + u = w + u$ então $v = w$. (Lei do corte, à direita).

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in E$. Tem-se:

1. $\alpha 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$
3. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(u)$ e em particular, $(-1)u = -u$
4. Se $\alpha u = 0_E$ então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

4.2 - Subespaços vectoriais

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto de F de E é um **subespaço vectorial** de E , ou simplesmente que é um **subespaço** de E , se F é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações nele naturalmente definidas por ser subconjunto de E (a que se chamam **operações induzidas** pelas operações de E no conjunto F).

(Critério de subespaço vectorial) Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem-se, F é um subespaço de E se, e só se, satisfaz cada uma das condições seguintes:

1. $F \subseteq E$
2. $0_E \in F$
3. $\forall_{u,v \in F} u + v \in F$
4. $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \forall_{u \in F} \alpha u \in F$

ou equivalente, se satisfaz as condições que resultam das anteriores substituindo 2 por $F \neq \emptyset$.

Se E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ então E e 0_E são subespaços de E , e designam-se por **subespaços triviais** de E , sendo iguais se, e só se, $E = \{0_E\}$.

Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E então $F \cap G$ é, ainda, um subespaço de E .

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . Tem-se, $F \cup G$ é um subespaço de E se, e só se, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . Chamamos **soma** do subespaço F com o subespaço G , e representamos por $F+G$, a $F+G = \{u+v : u \in F \wedge v \in G\}$. Dizemos que E é a **soma** de F e G , e

escrevemos $E = F + G$, se todo o elemento de E se pode escrever como soma de um elemento de F com um elemento de G .

A soma de dois subespaços de um espaço vectorial E é ainda um subespaço de E .

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . Dizemos que E é a **soma directa** de F e G , e escrevemos, $E = F \oplus G$, se para cada $w \in E$ existe um único par (u, v) , com $u \in F$ e $v \in G$ tal que $w = u + v$.

Nestas condições dizemos que G (respectivamente F) é um **subespaço suplementar** de F (respectivamente, G) em E .

Dizemos ainda que o vector u é a **projectção** de w sobre F , segundo G , e que o vector v é a projectção de w sobre G , segundo F .

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . São equivalentes as afirmações:

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Quaisquer que sejam $u, u' \in F$ e $v, v' \in G$, se $u + v = u' + v'$ então $u = u'$ e $v = v'$.

Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E . São equivalentes as afirmações:

1. $E = F \oplus G$
2. $E = F + G$ e $F \cap G = \{0_E\}$

4.3 – Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ elementos de E . Dizemos que $v \in E$ é **combinação linear** dos vectores $u_1, \dots, u_r$, se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$$

Aos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ chamamos os **coeficientes** da combinação linear e a $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ a **sequência dos coeficientes** da combinação linear.

OBSERVAÇÃO: Concluir que um vector v de um espaço vectorial E é combinação linear de vectores $u_1, \dots, u_r$ de E é um problema que, frequentemente, se reduz a verificar que um sistema de equações lineares é possível. Se o sistema é determinado, tal equivale a a firmar que v é combinação linear de $u_1, \dots, u_r$ sendo, neste caso, únicos os coeficientes da combinação linear.

Seja E um espaço vectorial e $u_1, \dots, u_r$ elementos de E . O conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \dots, u_r$, isto é

$$\{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}$$

é um subespaço de E .

Sejam $u_1, \dots, u_r$, com $r \in \mathbb{N}$, elementos de um espaço vectorial E . Chamamos **subespaço** (de E) **gerado** pela sequência $(u_1, \dots, u_r)$ ou pelos vectores $u_1, \dots, u_r$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \dots, u_r$. Tal subespaço é frequentemente denotado por

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}$$

Se $F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ dizemos, ainda, que $u_1, \dots, u_r$ **geram** F , que $u_1, \dots, u_r$ são **geradores** de F ou que a sequência $(u_1, \dots, u_r)$ é **geradora** de F .

Dizemos que um espaço vectorial é **finitamente gerado** se existirem $r \in \mathbb{N}$ e $u_1, \dots, u_r \in E$ tais que:

$$E = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r$ e $v_1, \dots, v_s$ vectores de E . Tem-se:

1. $\langle u_1, \dots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ se, e só se, para qualquer $i \in \{1, \dots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \dots, v_s$.
2. $\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ se, e só se, para qualquer $i \in \{1, \dots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \dots, v_s$ e para qualquer $j \in \{1, \dots, s\}$, v_j é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$.

Se $u_1, \dots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e se existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que u_i é combinação linear restantes $r - 1$ vectores então

$$\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_r \rangle = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r \rangle$$

Seja $S = (u_1, \dots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$ e seja $S' = (u'_1, \dots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos seguintes tipos:

- I. Troca das posições, na sequência, dos vectores u_i e u_j , com $i \neq j$.
- II. Multiplicação do vector $u_i, i \in \{1, \dots, r\}$, por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- III. Substituição do vector $u_i, i \in \{1, \dots, r\}$, por $u_i + \beta u_j, j \in \{1, \dots, r\}$, com $j \neq i$ e $\beta \in \mathbb{K}$

Tem-se

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \langle u'_1, \dots, u'_r \rangle$$

4.4 – Dependência e independência linear

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r \in E$, com $r \in \mathbb{N}$.

- Para $r = 1$, dizemos que a sequência (u_1) ou que o vector u_1 é **linearmente dependente** quando $u_1 = 0_E$
- Para $r \geq 2$, dizemos que $(u_1, \dots, u_r)$ é uma sequência **linearmente dependente**, ou que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes, quando pelo menos um dos vectores é combinação linear dos restantes vectores

A uma sequência $(u_1, \dots, u_r)$ que não é linearmente dependente chamamos **linearmente independente**, e dizemos que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes.

Esta definição, no caso particular de $r=2$, permite afirmar que uma sequência com dois vectores é linearmente dependente se, e só se, uma dos vectores é um **múltiplo escalar** do outro vector, isto é, se é igual ao produto de um escalar pelo outro vector.

Critério de independência linear – Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E . Os vectores $u_1, \dots, u_r$ são **linearmente independentes** se, e só se, a única forma de escrever 0_E como combinação linear de $u_1, \dots, u_r$ é tomando todos os coeficientes da combinação linear iguais a zero. É o mesmo que afirmar que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são **linearmente dependentes** se, e só se, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ não todos nulos (isto é que pelo menos um seja não nulo) tais que $\alpha u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0_E$.

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E . Os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se, para todo o vector que seja combinação linear de $u_1, \dots, u_r$ são únicos os coeficientes da combinação linear.

Seja $S = (u_1, \dots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E e seja $S' = (u'_1, \dots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos tipos I, II ou III do capítulo 4.3. Tem-se, S é linearmente dependente (respectivamente independente) se, e só se, S' é linearmente dependente (respectivamente, independente).

4.5 – Base e dimensão

Seja E um espaço vectorial e $(u_1, \dots, u_r)$ uma sequência de vectores de E . Dizemos que $(u_1, \dots, u_r)$ é uma **base** de E se é uma sequência geradora de E e é linearmente independente. Convencionamos que se $E = \{0_E\}$ então a sequência vazia é base de E .

Num espaço vectorial E finitamente gerado qualquer sequência geradora de E tem um número de vectores superior ou igual ao número de vectores de qualquer sequência linearmente independente.

O que implica que se um espaço vectorial E admite uma base com n elementos, então todas as bases de E têm n elementos.

Seja E um espaço vectorial que admite uma base com n elementos, com $n \in \mathbb{N}$. dizemos então que E tem **dimensão** n e escrevemos $\dim E = n$.

Seja E um espaço vectorial de dimensão n . Tem-se:

1. Qualquer sequência de vectores de E com um número de vectores inferiores a n não é geradora de E ;
2. Qualquer sequência de vectores de E com um número de vectores superior a n não é linearmente independente

Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\dim E = n$
2. Existe uma sequência geradora, com n vectores de E , e qualquer sequência geradora de vectores de E tem, no mínimo, n elementos.
3. Existe uma sequência linearmente independente, com n vectores de E , e qualquer sequência linearmente independente de vectores de E tem, no máximo, n elementos.

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_n$ vectores de E . Tem-se $(u_1, \dots, u_n)$ é uma **base** de E se, e só se, todo o vector de E é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_n$ e são únicos os coeficientes da combinação linear.

Sejam E um espaço vectorial sobre K e $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ uma base de E . Para cada $v \in E$, aos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, únicos, tais que $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ chamamos as **coordenadas** de v na base $\mathcal{B}$ e a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a **sequência das coordenadas** de v na base $\mathcal{B}$.

Designamos por **base canónica** de K^n , e representamos por $b.c.K^n$, a base $(e_1, \dots, e_n)$ sendo $e_i, i = 1, \dots, n$ o n -uplo com todas as componentes nulas excepto a i -ésima componente que é igual a 1.

Se $S = (v_1, \dots, v_s)$ é uma sequência geradora de um espaço vectorial E então existe uma subsequência de S que é uma base de E .

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E linearmente independentes. Se $v \in E$ é tal que não é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$ então $u_1, \dots, u_r, v$ são linearmente independentes, $\langle u_1, \dots, u_r \rangle \subsetneq \langle u_1, \dots, u_r, v \rangle$.

Teorema do completamento – Se $S = (u_1, \dots, u_r)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial E de dimensão n então existe uma base E de E com S como subsequência. Tal corresponde afirmar que existem vectores $w_1, \dots, w_{n-r}$ de E , com $n - r \geq 0$ tais que $(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_{n-r})$ é uma base de E .

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Se F é um subespaço de E então existe um subespaço G de E tal que $E = F \oplus G$ isto é, todo o subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita tem um suplementar.

Seja E um espaço vectorial de dimensão n . Tem-se:

1. Qualquer sequência geradora de E com n vectores é uma base de E .
2. Qualquer sequência linearmente independente de n vectores de E é uma base de E .

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Tem-se:

1. Se F é um subespaço de E então $\dim F \leq \dim E$
2. Se F é um subespaço de E e $\dim F = \dim E$ então $F = E$

4.6 – Teorema das dimensões

Seja E um espaço vectorial (não necessariamente de dimensão finita) e sejam F e G subespaços de E tais que $F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ e $G = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$. Tem-se:

1. $F + G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle$.
2. Se $(u_1, \dots, u_r)$ e $(v_1, \dots, v_s)$ são sequências linearmente independentes então a sequência $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$ é linearmente independente se, e só se, $F \cap G = \{0_E\}$.

Teorema das dimensões – Se E é um espaço vectorial (não necessariamente de dimensão finita) e F e G são subespaços de E de dimensão finita então $F + G$ e $F \cap G$ têm dimensão finita e $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Se F e G são subespaços de dimensão finita de um espaço vectorial E são equivalentes as afirmações:

1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. $\dim(F \cap G) = 0$
3. $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

4.7 – Matrizes e espaços vectoriais

As linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes.

As matrizes são muito úteis para resolver os principais problemas deste capítulo, nomeadamente determinar:

1. Se uma sequência de vectores é linearmente independente

A sequência $(u_1, \dots, u_p)$ é linearmente independente se, e só se, $r \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \right) = p$

2. Se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores

$$v \in \langle u_1, \dots, u_p \rangle \text{ se, e só se } r \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ v \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

3. Uma base de um espaço a partir de uma sequência geradora

$$\text{Se } F = \langle u_1, \dots, u_p \rangle \text{ e } \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{linhas}} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (f.e.) \text{ com } u'_1, \dots, u'_s \text{ não nulos, então a sequência } (u'_1, \dots, u'_s) \text{ é uma base de } F.$$

4. Uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Seja $(u_1, \dots, u_p)$ uma sequência linearmente independente de vectores de um subespaço F de $\mathbb{K}^n$

$$\text{com } \dim F = s \text{ e seja } (w_1, \dots, w_s) \text{ uma base de } F. \text{ Se } \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(linhas)}} \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_s \end{bmatrix} = W'(f.e.) \text{ e } \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(linhas)}} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_p \end{bmatrix} = U'(f.e.) \text{ então consideram-se as } s - p \text{ linhas de } W', w'_{i1}, \dots, w'_{is-p}, \text{ com pivôs}$$

em índices de coluna distintos dos da matriz U' . Nestas condições a sequência $(u'_1, \dots, u'_p, w'_{i1}, \dots, w'_{is-p})$ é uma base de F e, portanto, o mesmo sucede a $(u_1, \dots, u_p, w'_{i1}, \dots, w'_{is-p})$.

5. Se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

$$\text{Sejam } (u_1, \dots, u_p) \text{ e } (v_1, \dots, v_q) \text{ sequências de vectores de } \mathbb{K}^n. \text{ Se } \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(linhas)}} U''(f.e.r.) \text{ e } \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(linhas)}} V''(f.e.r.) \text{ então } \langle u_1, \dots, u_p \rangle = \langle v_1, \dots, v_q \rangle \text{ se, e só se, são iguais as linhas não nulas das matrizes } U'' \text{ e } V''.$$

4.8 – Mais sobre a característica de uma matriz

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Designamos por **espaço das linhas** de A , e representamos por $\mathcal{L}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas m linhas de A .

O subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas n linhas de A é designado por **espaço das colunas** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$.

Às dimensões dos subespaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ chamamos, respectivamente, **característica de linha** de A e

característica de coluna de A.

Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ matrizes equivalentes por linhas. Por cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja A_i a coluna i de A e seja B_i a coluna i de B . Se existem $k, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ tais que $A_k = \alpha_1 A_{j_1} + \dots + \alpha_s A_{j_s}$ então $B_k = \alpha_1 B_{j_1} + \dots + \alpha_s B_{j_s}$.

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se $A \xrightarrow{(linhas)} B$ então as colunas $j_1, \dots, j_t$ de A são linearmente dependentes (respectivamente independentes) se, e só se, o mesmo sucede às colunas $j_1, \dots, j_t$ de B .

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se:

1. As transformações elementares sobre linhas (respectivamente colunas) não alteram a característica de coluna (respectivamente de linha) de A
2. A característica de linha e a característica de coluna de A são iguais e coincidem com a característica de A , isto é $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = r(A)$.
3. As matrizes A e A^T têm a mesma característica.

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

1. A característica de A é o número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.
2. A característica de A é a dimensão do espaço das linhas de A
3. A característica de A é a dimensão do espaço das colunas de A
4. A característica de A é o número máximo de linhas linearmente independentes de A
5. A característica de A é o número máximo de colunas linearmente independentes de A

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Designamos por **espaço nulo** de A ou **núcleo** de A , e representamos por $\mathcal{N}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ constituído pelos vectores que são solução do sistema de equações lineares

$$\text{homogéneo } AX = 0, \text{ isto é, } \mathcal{N}(A) = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K} : A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0 \right\}. \text{ A dimensão de } \mathcal{N}(A)$$

chamamos **nulidade** de A .

Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ então $\dim \mathcal{N}(A) = n - r(A)$.

5 – Aplicações lineares**5.1 – Definição, exemplos e propriedades**

Dizemos que uma aplicação $f : E \rightarrow E'$ é **aplicação linear** (sobre $\mathbb{K}$) se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u + v) = f(u) \oplus f(v)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in E \quad f(\alpha u) = \alpha \otimes f(u)$

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

1. $f(0_E) = 0'_{E'}$

2. $f(-u) = -f(u)$, para qualquer $u \in E$

5.2 – Operações com aplicações

Sendo $f : E \rightarrow E'$ e $g : E \rightarrow E'$ aplicações arbitrárias chamamos **aplicação soma** das aplicações f e g , e denotamos por $f + g$, à aplicação $f + g : E \rightarrow E'$ tal que $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ para qualquer $u \in E$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação arbitrária. Chamamos **aplicação produto de α por f** , e representamos por αf , à aplicação $\alpha f : E \rightarrow E'$ tal que $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$ para qualquer $u \in E$.

Sejam $f : E \rightarrow E'$ e $g : E \rightarrow E'$ aplicações lineares e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se:

1. $f + g$ é uma aplicação linear
2. αf é uma aplicação linear

Sejam A, B , e C conjuntos e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ aplicações. Chamamos **aplicação composta** de g com f (também designada por “**g após f**”), e representamos por $g \circ f$, à aplicação $g \circ f : A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para qualquer $a \in A$.

A aplicação obtida por composição de duas aplicações lineares é, ainda, uma aplicação linear.

Sejam $f : A \rightarrow A$ uma aplicação e $k \in \mathbb{N}_0$. Chamamos **potência de expoente k de f** , e representamos por f^k , à aplicação $f^k : A \rightarrow A$ tal que

$$f^k = \begin{cases} id_A, & \text{se } k = 0 \\ f^{k-1} \circ f, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5.3 – Imagem e núcleo

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Chamamos **núcleo** de f , e representamos por $\text{Nuc } f$ ou $\text{Ker } f$ (do inglês “kernel”), ao conjunto $\text{Nuc } f = \{u \in E : f(u) = 0_{E'}\}$.

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

1. $\text{Nuc } f$ é um subespaço de E .
2. $\text{Im } f$ é um subespaço de E' .

Sejam $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear, W um subespaço de E e W' um subespaço de E' . Chamamos **imagem de W por f** a $f(W) = \{f(u) : u \in W\}$ e **imagem recíproca de W' por f** a $f^{-1}(W') = \{u \in E : f(u) \in W'\}$

A imagem de uma aplicação permite determinar se a aplicação é **sobrejectiva** uma vez que $f : A \rightarrow B$ é sobrejectiva se, e só se, $\text{Im } f = B$.

O núcleo de uma aplicação linear permite determinar se a aplicação é **injectiva**, uma vez que $f : A \rightarrow B$ é injectiva se, e só se, $\text{Nuc } f = \{0_E\}$.

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

1. Se E é finitamente gerado e $E = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ então $\text{Im } f = \langle f(v_1), \dots, f(v_s) \rangle$. Dizemos então que

f transforma geradores de E em geradores de $\text{Im } f$.

2. Se $u_1, \dots, u_r \in E$ são linearmente independentes e f é injectiva então $f(u_1), \dots, f(u_r)$ são linearmente independentes. Dizemos que se f é injectiva então f transforma vectores linearmente independentes de E em vectores linearmente independente da $\text{Im } f$.

As dimensões de $\text{Nuc } f$ e de $\text{Im } f$ designam-se por **nulidade** de f e por **característica** de f , e representam-se por $n(f)$ e por $r(f)$.

Teorema da dimensão – Se $f : E \rightarrow E'$ é uma aplicação linear, com E de dimensão finita, então $\text{Nuc } f$ e $\text{Im } f$ também têm dimensão finita e $\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f$.

Se $f : E \rightarrow E'$ é uma aplicação linear, e E e E' ambos de dimensão finita, verificam que $\dim E = \dim E'$ então são equivalentes as afirmações:

1. f é injectiva;
2. f é sobrejectiva
3. f é bijectiva

Teorema da Extensão Linear - Sejam E e E' espaços vectoriais, com E de dimensão finita. Seja $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e sejam $u'_1, \dots, u'_n$ vectores arbitrários de E' . Existe uma e uma só aplicação linear $f : E \rightarrow E'$ tal que $f(e_i) = u'_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Atendendo ao teorema da extensão linear é usual afirmar que se o espaço de partida de uma aplicação linear tem dimensão finita então a aplicação fica completamente determinada dando as imagens dos vectores de uma base arbitrária do espaço de partida.

5.4 – Aplicações invertíveis e isomorfismos

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é **invertível** se existe uma aplicação $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$ e $g \circ f = \text{id}_A$. Representamos tal aplicação (única) por f^{-1} que designamos por **inversa** de f . Uma aplicação é invertível se e só se for bijectiva.

A uma aplicação linear e bijectiva (invertível) $f : E \rightarrow E'$ chamamos **isomorfismo linear** (ou simplesmente **isomorfismo**) de E em E' .

Dizemos que E é **isomorfo** a E' , e representamos por $E \simeq E'$, se existe um isomorfismo de E em E' .

Sejam E e E' espaços vectoriais, com E de dimensão finita. Tem-se, E e E' são isomorfos se, e só se $\dim E = \dim E'$.

5.5 – Matriz de uma aplicação linear

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ uma base de E' . Designamos por **matriz de f em relação às bases de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$** (por esta ordem) e representamos por $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, a matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuja coluna j , $j = 1, \dots, n$ é a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base $\mathcal{B}'$. Assim

$$f(e_j) = A_{1j}e'_1 + \dots + A_{mj}e'_m \quad j = 1, \dots, n$$

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases arbitrárias de E e E' , respectivamente, e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Tem-se $\dim \text{Im } f = r(A)$.

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de E , $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ uma base de E' e $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de um vector $u \in E$ na base $\mathcal{B}$ então a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ com

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Designamos por **matriz coluna das coordenadas** de um vector numa determinada base, a matriz cuja única coluna é a sequência das coordenadas do vector na base considerada.

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E e seja $u \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$, então a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ com

$$\mathcal{M}(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E designamos por **matriz de mudança de base** de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ a matriz $\mathcal{M}(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

6 – Valores e vectores próprios

6.1 – Definição, exemplos e propriedades

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos **endomorfismo** de E a qualquer aplicação linear de E em E .

Seja $f : E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Se $u \in E \setminus \{0_E\}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ são tais que $f(u) = \alpha u$ dizemos que α é **valor próprio** de f e u é **vector próprio** de f associado ao valor próprio α .

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Se $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n \times 1}\}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ são tais que $AX = \alpha X$, dizemos que :

- α é **valor próprio** de A ;
- X é **vector próprio** de A associado ao valor próprio α .

Sejam $f : E \rightarrow E$ uma aplicação linear e α um valor próprio de f . Ao subespaço vectorial $E_\alpha = \{u \in E : f(u) = \alpha u\} = \text{Nuc}(f - \alpha id_E)$ chamamos **subespaço próprio** de f associado ao valor próprio α .

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Se $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n \times 1}\}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ são tais que $AX = \alpha X$, dizemos que:

- α é **valor próprio** de A ;
- X é **vector próprio** de A associado ao valor próprio α .

Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A . Ao subespaço vectorial

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

chamamos **subespaço próprio** de A associado ao valor próprio α .

Designamos por **multiplicidade geométrica** do valor próprio α , e representamos por $mg(\alpha)$, a dimensão do subespaço M_α .

O resultado seguinte permite determinar a multiplicidade geométrica de um valor próprio sem determinar o subespaço próprio que lhe está associado. Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A . Tem-se $mg(\alpha) = n - r(A - \alpha I_n)$

Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ um valor próprio de A . Tem-se, α é **valor próprio** de A se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **polinómio característico** de A , e representamos por $p_A(x)$ ou simplesmente $p(x)$ se não houver ambiguidade, ao polinómio na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$ dado por $p(x) = |A - xI_n|$.

À equação $p(x) = 0$ chamamos **equação característica** de A .

Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A . Designamos por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α e representamos por $ma(\alpha)$, a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A , $p_A(x)$, isto é, o maior inteiro k tal que $(\alpha - x)^k$ divide $p_A(x)$.

Os valores próprios de uma matriz triangular são os elementos da sua diagonal principal.

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

1. A é invertível;
2. A não tem valor próprio zero;
3. O termo constante do polinómio característico de A é não nulo.
4. $\det A$ é o termo constante do polinómio característico de A .

Para obter o subespaço próprio de A associado ao valor próprio α basta resolver o sistema $(A - \alpha I_n)X = 0$.

Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A e B são **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP = B$.

Se $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ são semelhantes então os seus polinómios característicos são iguais e, consequentemente, têm os mesmos valores próprios e com iguais multiplicidades algébricas.

Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial E , com E de dimensão finita, e seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de E . Chamamos de **polinómio característico** de f ao polinómio característico da matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial E , com E de dimensão finita, e seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de E e $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Tem-se:

1. u é vector próprio de f se, e só se, a matriz coluna X das coordenadas de u , na base B , é um vector próprio de A ;
2. α é valor próprio de f se, e só se, α é valor próprio de A .

Seja α um valor próprio de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se $mg(\alpha) \leq ma(\alpha)$.

6.2 - Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é uma matriz **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz invertível $P \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e uma matriz diagonal $D \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tais que

$P^{-1}AP = D$. Nestas condições dizemos que P é uma matriz **diagonalizante** de A .

Uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável se, e só se, A tem n vectores próprios linearmente independentes. Neste caso se $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ são n vectores próprios de A linearmente independentes correspondentes, aos valores próprios $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (não necessariamente distintos) então a matriz P cuja coluna i é um n -uplo correspondente a $X_i, i = 1, \dots, n$ que representamos por $P = [X_1 | \dots | X_n] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível e é uma matriz diagonalizante de A . Mais especificamente, tem-se:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são os valores próprios, dois a dois distintos, de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ então A é diagonalizável se, e só se, $\sum_{i=1}^r \text{mg}(\alpha_i) = n$.

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tem n valores próprios, dois a dois, distintos, então A é diagonalizável.

Dizemos que um endomorfismo f de E , com E de dimensão finita, é diagonalizável se existe uma base $\mathcal{B}$ de E tal que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma matriz diagonal.