Grupo I

1. $AB = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, logo a) é falsa.

$ABC = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, logo b) é falsa.

$CB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) + 1\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0_{1\times 1}$, logo

c) é verdadeira.

$BC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, logo d) é falsa.

2. Para $u = (2,3,4) \in A$ e $\alpha = -1$ tem-se $\alpha u = (-2,-3,-4) \notin A$, logo A não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ e assim a) e b) são falsas.

(Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $u = x^3 \in B$ tem-se $\alpha u \notin B$, o que seria outro bom argumento para rejeitar a) e b).)

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin C$, logo c) é falsa, pois C não pode ser um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Como $D = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ temos:

1. $D \subseteq \mathbb{R}^3$

2. $(0,0,0) \in D$

3. Se $u = (x, -x, x)$ e $v = (x', -x', x')$ então

$$u+v = \big((x+x'), -(x+x'), (x+x')\big) \in D$$

4. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x, -x, x)$ então $\alpha u = \big((\alpha x), -(\alpha x), (\alpha x)\big) \in D$

e, pelo critério de subespaço vectorial, podemos concluir que D é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ e, portanto, d) é verdadeira

3. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ temos $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 1$,

pelo que a) não é sempre verdadeira.

Se n for par tem-se $\det(-B) = (-1)^n \det B = \det B$,

pelo que b) não é sempre verdadeira.

$\det(AB) = (\det A)(\det B) = 2 \times (-1) = -2$, logo c) é falsa.

$\det(ABC) = (\det(AB))(\det C) = -2 \times 3 = -6$, logo

d) é verdadeira.

4.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & -3 & 2\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+l_1]{l_2-2l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & 3 & -2 & 2\alpha+1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3+l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & -2 & 3\alpha-1 \end{array}\right]$$

A última matriz é a matriz ampliada de um sistema de equações equivalente (i.e., com as mesmas soluções) ao original, $Ax=b$.

Como a característica de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é igual a 3, que é o número de incógnitas do sistema e é também a característica da matriz ampliada (que só tem três linhas e nunca poderia ter característica superior a 3), podemos concluir que, independentemente do valor de α, o sistema tem solução única, logo b) é a única verdadeira.

(NOTA: há outras maneiras de provar que o sistema tem solução única, por exemplo verificar que o determinante da matriz não ampliada é diferente de zero; isso dará mais ou menos o mesmo trabalho que o método acima; mas para resolver o sistema basta usar a matriz em escada obtida para obter, por esta ordem, os valores de x_3, x_2 e x_1; isso dará muito menos trabalho do que calcular os quatro determinantes exigidos pela regra de Cramer; em todo o caso, esta pergunta não pedia as soluções do sistema, apenas para dizer se existia solução e se era única.)

Grupo II :

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}l_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+2l_1 \\ l_3-3l_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+l_2]{}$$

$$\xrightarrow[l_3+l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) O espaço nulo de A é o conjunto das soluções de

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ou seja}$$

$$\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{5}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_1 = 2\left(\frac{5}{2}x_3 - \frac{3}{2}\right)x_4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{5}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_1 = -5x_3 - 3x_4 - x_3 - 2x_4 = -6x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(A) = \left\{ \left(-6x_3 - 5x_4, -\frac{5}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, x_3, x_4\right) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

(Ou $\mathcal{N}(A) = \left\{ x_3\left(-6, -\frac{5}{2}, 1, 0\right) + x_4\left(-5, -\frac{3}{2}, 0, 1\right) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.)

ii) (Observe-se que as colunas da matriz A têm terceira linha diferente de zero e, portanto, $\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}\right)$ não é uma base de $C(A)$.)

Como os pivôs de $\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1 & -2\\0 & -2 & -5 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ estão nas colunas 1 e 2, uma base para $C(A)$ pode ser obtida com as colunas 1 e 2 de A: $C(A) = \left\langle \begin{bmatrix}-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-6\\8\end{bmatrix} \right\rangle$.

(Também se chegaria a uma base de $C(A)$ escolhendo as duas primeiras linhas da matriz em escada equivalente por linhas à matriz A^T, mas isso daria mais trabalho.)

iii) $\left(\begin{bmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -6 & -3 & 1\end{bmatrix}\right)$ é uma base de $L(A)$ (tal como $\left(\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1 & -2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -2 & -5 & -3\end{bmatrix}\right)$).

iv) A característica de A é a dimensão do espaço das linhas de A (que tem de ser igual à dimensão do espaço das colunas), ou seja, é igual a 2.

v) $\dim(\mathcal{N}(A)) = 4 - r(A) = 4 - 2 = 2$, como aliás já era evidente no final da resolução de i).

Grupo III

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2-l_1 \\ l_3-kl_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -1-k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3+l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & -2-k \end{array}\right]$$

Se $-k^2-k+2 \neq 0$, ou seja, se $k \neq 1$ e $k = -2$, o sistema é possível e determinado e a sua solução é

$$\begin{cases} z = \dfrac{-2-k}{-k^2-k+2} = \dfrac{-2-k}{-(k+2)(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} \\ y = \dfrac{-1-(1-k)z}{k-1} = \dfrac{-1-(-1)}{k-1} = 0 \\ x = 1-y-kz = 1-0-\dfrac{k}{k-1} = \dfrac{k-1-k}{k-1} = -\dfrac{1}{k-1} \end{cases}$$

Se $k=1$ a matriz acima fica $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$,

que representa um sistema onde a terceira equação é $0=-3$, ou seja, um sistema impossível (i.e, sem soluções).

Se $k=-2$ a matriz acima fica $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

que representa um sistema cujas soluções são

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1-3z}{-3} = z+\dfrac{1}{3} \\ x = 1+2z-y = 1+2z-\left(z+\dfrac{1}{3}\right) = z+\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Grupo IV Para vermos que os determinantes são iguais vamos efectuar operações sobre as colunas do primeiro determinante até obtermos o segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3+(a+b+c)c_2]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2+(ab+bc+ac) \\ 1 & b & b^2+(ab+bc+ac) \\ 1 & c & c^2+(ab+bc+ac) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(ab+ac+bc)c_1]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Grupo V: Uma vez que $\mathbb{R}_2[x]$ tem dimensão 3 e temos 4 polinómios, eles são necessariamente linearmente dependentes. Identificando $\mathbb{R}_2[x]$ com $\mathbb{R}_3$ através do isomorfismo

$ax^2+bx+c \longmapsto (a,b,c)$, podemos colocar os vetores numa matriz e obter a f.e.r.

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 11 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+4l_1 \\ l_3+11l_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & 35 & 5 \\ 0 & -13 & 91 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{5}l_2 \\ \frac{1}{13}l_3}]{} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Esta matriz

tem característica 2 pelo que basta usarmos as 2 primeiras colunas, o que corresponde a u_1 e u_2, ou seja $E = \langle u_1, u_2 \rangle$, uma vez que u_1 e u_2 são l.i.

Para que um polinómio ax^2+bx+c pertença a E é necessário e suficiente que ele seja combinação linear de u_1 e u_2, ou seja que existam α e β reais tais que que $\alpha u_1 + \beta u_2 = ax^2+bx+c$, o que dá em forma matricial
$$\left[\begin{array}{cc|c} 11\alpha & 9\beta & a \\ 4\alpha & 3\beta & b \\ -\alpha & -2\beta & c \end{array}\right].$$

Queremos uma condição que garanta que a matriz aumentada e a matriz reduzida tenham a mesma característica.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 11\alpha & 9\beta & a \\ 4\alpha & 3\beta & b \\ -\alpha & -2\beta & c \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{cc|c} -\alpha & -2\beta & c \\ 4\alpha & 3\beta & b \\ 11\alpha & 9\beta & a \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2+4\ell_1]{\ell_3+11\ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} -\alpha & -2\beta & c \\ 0 & -5\beta & b+4c \\ 0 & -13\beta & a+11c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 - \frac{13}{5}\ell_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} -\alpha & -2\beta & c \\ 0 & -5\beta & b+4c \\ 0 & 0 & a+11c-\frac{13}{5}(b+4c) \end{array}\right]$$
, e para que a característica seja a mesma é necessário que $a+11c-\frac{13}{5}(b+4c)=0$ ou seja que $\underline{5a-13b+3c=0}$.

Para $a=15$, $b=6$ e $c=1$ tem-se $5\times 15 - 13\times 6 + 3 = 75-78+3=0$, e portanto $v \in E$.

Pelo que vimos anteriormente E tem dimensão 2 e uma base de E é constituída pela sequência (u_1, u_2).

<u>Grupo VI</u>: Sabemos que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ e que $\dim F = n$, logo temos uma base constituída pelos

n polinómios $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Se q é um polinómio que não está em F, então $q \neq 0$ pois o polinómio nulo pertence ao subespaço F.

Para garantirmos que a sequência $(p_1, p_2, \dots, p_n, q)$ é 1 base de $\mathbb{R}_n[x]$ bastar mostrar 2 coisas:

1. O número de elementos da sequência é $n+1$, e
2. esses $n+1$ polinómios são linearmente independentes.

1. Uma vez que $q \notin F$, q é diferente de $p_1, p_2, \dots$ e de p_n. Assim temos $n+1$ polinómios distintos.
2. Como $(p_1, \dots, p_n)$ é uma base de F, então os n polinómios são l.i. e portanto se, por absurdo os $n+1$ polinómios não fossem l.i. então q seria combinação linear dos elementos da base de F, mas isso é absurdo pois $q \notin F$ é equivalente a dizer que q não é combinação linear dos polinómios de uma base de F. Assim a sequência $(p_1, \dots, p_n, q)$ é linearmente independente.

Podemos concluir que $(p_1, \dots, p_n, q)$ é uma base de $\mathbb{R}_n[x]$.