U.C. 71061

Curso de Qualificação para Estudos Superiores - Matemática

16 de junho de 2017

Critérios de avaliação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (1.0 valor) Por definição de frequência relativa simples,

$$f_i = \frac{n_i}{N},$$

onde n_i é o número de casais inquiridos com i filhos, $i = 1, 2, 3, 4$, e $N = 80$ o número total de casais com filhos inquiridos. Logo, o número de casais inquiridos com dois ou três filhos é igual a

$$n_2 + n_3 = (f_2 + f_3) \times N = 0.50 \times 80 = 40.$$

2. (2.0 valores) Para que o numerador da expressão dada faça sentido tem que se ter

$$|x-3|-1 \geq 0.$$

Ou seja,

$$|x-3| \geq 1 \Longleftrightarrow x-3 \geq 1 \vee x-3 \leq -1,$$

o que é equivalente a $x \in]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$. Por outro lado, o denominador nunca pode ser nulo:

$$e^{x-2} - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow e^{x-2} \neq 1.$$

Sendo a função exponencial injectiva, existe um único ponto $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^{x-2} = 1$: o ponto $x - 2 = 0$. Deste modo,

$$e^{x-2} - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow e^{x-2} \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq 2.$$

O domínio da função f é assim igual ao conjunto

$$(]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}) =]-\infty, 2[\cup [4, +\infty[.$$

3. (1.50 valor) Em "Resolução dos Exercícios sobre Limites", ver resolução da questão 4.4.

4. (5.50 valores)

4.1. (1.70 valor) Nesta questão pretende-se determinar os pontos $x > 2$ tais que

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} - 1 = -1 \Longleftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen}(x-2) = 0.$$

Atendendo às propriedades da função seno, tem-se assim

$$\operatorname{sen}(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

pelo que

$$\{x \in]2, +\infty[\, : g(x) = -1\} =]2, +\infty[\setminus \{2 + k\pi : k \in \mathbb{N}\}.$$

4.2. (1.80 valor) No intervalo $]-\infty, 2[$ a função g está definida por

$$g(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Graficamente, a função $x \mapsto x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ é uma parábola de concavidade voltada para cima e, por conseguinte, é uma função decrescente em $]-\infty, \frac{2+3}{2}[$ e crescente em $]\frac{2+3}{2}, +\infty[$. Em particular, no intervalo $]-\infty, 2[\subseteq]-\infty, \frac{2+3}{2}[$, $g(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ é uma função decrescente.

4.3. (2.0 valores) Atendendo a que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, tem-se

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} - 1 \right) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \right) - 1 = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Logo, existe o limite

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 0.$$

Como

$$g(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0,$$

conclui-se, assim, que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 0 = g(2),$$

o que prova, por definição, a continuidade de g no ponto 2.

5. (2.0 valores) Atendendo à regra da derivação do quociente, para qualquer $x \neq -\frac{1}{5}$ tem-se

$$h'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+3})'(5x+1) - (5x+1)'\sqrt{x^2+3}}{(5x+1)^2} = \frac{(\sqrt{x^2+3})'(5x+1) - 5\sqrt{x^2+3}}{(5x+1)^2},$$

onde

$$(\sqrt{x^2+3})' = ((x^2+3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{1/2-1}(x^2)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$