UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

U.C. 21082
Matemática Finita

29 de junho de 2022

Critérios de avaliação

- Para a correção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efetuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações incorretas.

Correção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. No conjunto A existem 5 vogais e 21 consoantes. Uma vez que se pretende que não haja repetição das vogais, nem das consoantes, existem 5×4 possibilidades para a escolha das duas vogais e $21 \times 20 \times 19$ possibilidades para a escolha das três consoantes, num total de

$$(5 \times 4) \times (21 \times 20 \times 19) = 159600$$

maneiras diferentes para formar sequências distintas com 5 letras, em que a primeira letra e a última letra são vogais distintas e as restantes letras são consoantes todas diferentes.

2. Em qualquer número par compreendido entre 20000 e 80000, o algarismo das dezenas de milhar só pode tomar valores no conjunto $\{2,3,4,5,6,7\}$ e o algarismo das unidades só pode tomar valores no conjunto $\{0,2,4,6,8\}$.

Nesta questão pretende-se determinar todos os números pares compreendidas entre 20000 e 80000 da forma

a	b	c	b	a

Um tal número terá então de verificar $a \in \{2,3,4,5,6,7\} \cap \{0,2,4,6,8\} = \{2,4,6\}$ e $b, c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, num total de $3 \times 10 \times 10 = 300$ possibilidades.

3. Pelo binómio de Newton e atendendo a que $4n$ é um número par tem-se

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (-3)^{n-k} \binom{n}{k}\right)^4 = ((-2)^n)^4 = 2^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k}.$$

4. Esta questão é equivalente a provar que 322751 é divisível por 13. Pelo critério de divisibilidade por 13 do Exercício 10.1 da Atividade Formativa 2,

$$\begin{aligned} 13 \,|\, 322751 &\iff 13 \,|\, (\underbrace{32275 - 9 \times 1}_{=32266}) \iff 13 \,|\, (\underbrace{3226 - 9 \times 6}_{=3172}) \iff \\ &\iff 13 \,|\, (\underbrace{317 - 9 \times 2}_{=299}) \iff 13 \,|\, (\underbrace{29 - 9 \times 9}_{=-52}) \iff \\ &\iff 13 \,|\, 52 \iff 13 \,|\, (\underbrace{5 - 9 \times 2}_{-13}), \end{aligned}$$

com o que fica provado o pretendido, pois o 13 é um divisor de -13.

5.1. De modo equivalente, pretende-se determinar $\mathrm{mdc}(1634, 3827)$. Por sucessivas aplicações do algoritmo de Euclides (Lema 1.4), tem-se

- $3827 = 1634 \times 2 + 559 \implies \mathrm{mdc}(3827, 1634) = \mathrm{mdc}(1634, 559)$
- $1634 = 559 \times 2 + 516 \implies \mathrm{mdc}(1634, 559) = \mathrm{mdc}(559, 516)$
- $559 = 1 \times 516 + 43 \implies \mathrm{mdc}(559, 516) = \mathrm{mdc}(516, 43)$
- $516 = 12 \times 43 \implies \mathrm{mdc}(516, 43) = \mathrm{mdc}(43, 0) = 43$

5.2. Pelo Corolário 1.8 do Texto sobre Divisibilidade e pela alínea anterior,

$$a = \mathrm{mdc}(3827, 1634)k = 43k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Do Teorema de Bachet-Bézout resulta que

$$\exists\, x, y \in \mathbb{Z} : \ a^n x + b^n y = 1$$

Como $n \geq 2$, tem-se $a^{n-1}, b^{n-1} \in \mathbb{Z}$ e, por conseguinte,

$$a^n x + b^n y = 1 \iff a(\underbrace{a^{n-1}x}_{\in\mathbb{Z}}) + b(\underbrace{b^{n-1}y}_{\in\mathbb{Z}}) = 1,$$

o que pelo Corolário 1.8 do Texto sobre Divisibilidade implica que $\mathrm{mdc}(a, b)$ é um divisor de 1. Como por definição $\mathrm{mdc}(a, b) > 0$, conclui-se que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.

7.1. Na página do curso ver fórum `https://elearning.uab.pt/mod/forum/discuss.php?d=868749#p2993175`

7.2. Dada a relação de recorrência

$$a_n = 535a_{n-1} - 2124a_{n-2}$$

o polinómio característico correspondente é igual a

$$p(t) = t^2 - 535t + 2124.$$

Como as raízes de p são iguais a 4 e a 531, cada termo a_n da solução geral é então igual a

$$a_n = \alpha 4^n + \beta 531^n$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad 4\alpha + 531\beta = a_1 = 527,$$

ou seja, para $\beta = -\alpha = 1$. Assim e para todo o $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 531^n - 4^n \in \mathbb{Z}$.

7.3. Pelo Exercício 3.1.1 da Atividade Formativa 2, $531 - 4 = 527$ é um divisor de $531^n - 4^n = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Donde, por transitividade (Lema 1.1),

$$31 \,|\, 527 \;\wedge\; 527 \,|\, a_n \implies 31 \,|\, a_n.$$

7.4. Como $531 > 4$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $531^n \geq 4^n$, o que significa que $a_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Assim e pela Proposição 1.13 do Texto sobre Divisibilidade,

$$\mathrm{mmc}(a_n, 17) = \frac{17a_n}{\mathrm{mdc}(a_n, 17)}.$$

Como 17 é um divisor de 527, pela alínea anterior e por transitividade (Lema 1.1) tem-se

$$17 \,|\, 527 \;\wedge\; 527 \,|\, a_n \implies 17 \,|\, a_n.$$

Assim, $\mathrm{mdc}(a_n, 17) = 17$ e, por conseguinte, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mmc}(a_n, 17) = a_n$.