UAb

FÍSICA GERAL | 21048

ORIENTAÇÕES DE RESPOSTA

EXAME DE 1ª ÉPOCA

Ano letivo: 2021-22

Versão: 11-jan-22

Q1

(a) No instante em que se desprende, a posição do parafuso é, no referencial da figura, $x_0, y_0, z_0 = (0, R, h) = (0; 3{,}0; 2{,}5)$. Quanto à velocidade, esta tem apenas componente segundo x (enunciado) e a sua magnitude é herdada do MCU do carrossel, i.e., $v = \omega R$. Temos portanto

$$v = \omega R \rightarrow v = \frac{2\pi}{T} R \Leftrightarrow v = \frac{6{,}283}{10} \cdot 2{,}50 = 1{,}571 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Em termos de vetor velocidade este é então, a 2 AS,

$$\vec{v}_0 = 1{,}6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \hat{\mathbf{i}}$$

(b) O parafuso segue um movimento de projétil, que se dá horizontalmente segundo x e verticalmente segundo z, com y constante e igual a 3,0 m. O tempo de voo pode ser obtido de

$$z = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = 2{,}5 + 0t - 4{,}9t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{-2{,}5}{-4{,}9}} = 0{,}7143 \text{ s}$$

Durante este tempo o parafuso desloca-se segundo x de

$$x = x_0 + v_{0x} t \rightarrow x = 0 + 1{,}571 \cdot 0{,}7143 = 1{,}122 \text{ m} \quad (1{,}1 \text{ m})$$

O local de queda é então, a 2 AS e no SI,

$$x, y, z = (1{,}1;\ 3{,}0; 0)$$

(c) Segundo x e y a velocidade é constante e conhecida: $v_x, v_y = (1{,}6; 0)$. Segundo z pode ser obtida de

$$v_z = v_{0z} - gt \rightarrow v_z = 0 - 9{,}8 \cdot 0{,}7143 = 7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A velocidade no embate é então

$$v_x, v_y, v_z = (1{,}6;\ 0{,}0;\ 7{,}0)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

e a rapidez correspondente

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \rightarrow v = \sqrt{1{,}571^2 + 0^2 + 7{,}000^2} = 7{,}174\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(7{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

(d) O deslocamento é de

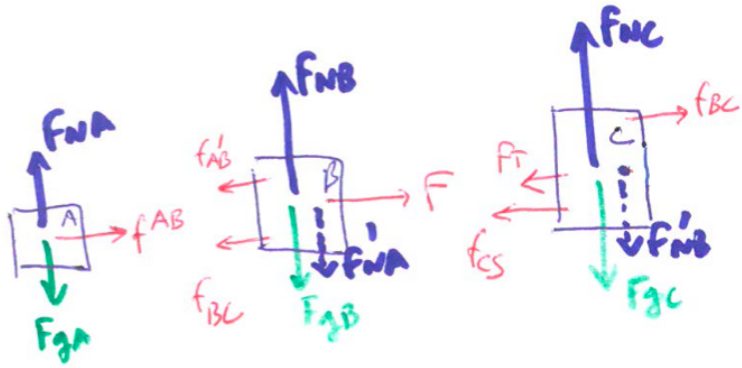
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \rightarrow \Delta\vec{r} = (1{,}122; 3{,}0; 0) - (0; 3{,}0; 2{,}5) = (1{,}122; 0; -2{,}5)$$

e a velocidade média

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v}_m = \frac{(1{,}122; 0; -2{,}5)}{0{,}7143} \Leftrightarrow \vec{v}_m = (1{,}571; 0; -3{,}500) \Leftrightarrow \vec{v}_m$$
$$= 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\mathbf{i}} - 3{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Q2

(a) Forças em A B e C:



(b) Olhando ao diagrama de forças para B, verificamos que para B se mover, o atrito estático entre AB e BC deve ser inferior a F. Aplicando a 1ª lei de Newton segundo y obtemos $F_{NA} = F_{gA} = m_A g$ e $F_{NB} = F_{gA} + F_{gB} = (m_A + m_B)g$, estes atritos máximos são: (notar que do enunciado $\mu_s = \mu_k$ para todos os atritos)

$$f_s^{AB,\max} = \mu_{AB} F_{NA} \Leftrightarrow f_s^{AB,\max} = 0{,}45 \cdot 3{,}5 \cdot 9{,}8 = 15{,}44\ \mathrm{N}$$

$$f_s^{BC,\max} = \mu_{BC} F_{NB} \Leftrightarrow f_s^{BC,\max} = \mu_{BC} F_{NB} = 0{,}60 \cdot (7{,}0 + 3{,}5) \cdot 9{,}8 = 61{,}74\ \mathrm{N}$$

Somando estes atritos máximos temos 77,18 N, que é inferior à magnitude de F (90 N), pelo que B irá mover-se.

(c) Para resolver esta alínea vamos assumir que $a_A = a_B (= a)$ e verificar se esta assunção é consistente com os resultados obtidos. Aplicando a 2ª lei de Newton segundo x temos, para A B e C respetivamente (reparar que C ficará sempre estacionário),

$$\begin{array}{c} f_s^{AB} = m_A a \\ F - f_s^{AB} - f_k^{BC} = m_B a \\ f_k^{BC} - f_s^{CS} - F_T = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} f_s^{AB} = m_A a \\ F - m_A a - \mu_{BC} F_{NB} = m_B a \\ F_T = f_s^{CS} + \mu_{BC} F_{NB} \end{array}$$

$$\dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} 90 - 61{,}74 = (m_a + m_B)a \\ F_T = 61{,}74 - f_s^{CS} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} f_s^{AB} = 3{,}5 \cdot 2{,}691 = 9{,}419\ \mathrm{N} \quad (9{,}4\ \mathrm{N}) \\ a = \frac{90 - 61.74}{7{,}0 + 3{,}5} = 2{,}691\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(2{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \\ F_T = 61{,}74 - f_s^{CS} \end{array}$$

Com a aceleração calculada, podemos agora verificar se o resultado faz sentido. Como $f_s^{AB} = 9{,}4\ \mathrm{N} < 15{,}44\ \mathrm{N}$, o atrito entre A e B é estático e a assunção $a_A = a_B$ é válida. Caso não fosse, i.e., se $f_s^{AB} > 15{,}44\ \mathrm{N}$, o bloco A deslizaria sobre B e haveria que substituir f_s^{AB} por f_k^{AB}, cujo valor é conhecido (15,44 N) e refazer os cálculos.

Por último, quanto à tensão, o valor máximo de f_s^{CS} é: (é fácil de ver que $F_{NC} = (m_A + m_B + m_C)g$)

$$f_s^{CS,\max} = \mu_{CS} F_{NC} \Leftrightarrow 0{,}80 \cdot (10 + 7{,}0 + 3{,}5) \cdot 9{,}8 = 161\ \mathrm{N}$$

Do enunciado sabemos que a tensão só atua quando esta força saturar. Se substituirmos então $f_s^{CS} = 61{,}74$ (valor menor que 161 N) na expressão $F_T = 61{,}74 - f_s^{CS}$, obtemos $F_T = 0\ \mathrm{N}$, que é o valor procurado da tensão. Essa força foi marcada no desenho da alínea (a) porque não sabemos à partida se ela vai ter um valor maior que zero.

Q3

(a) Na ausência de atrito o motor é a única entidade a realizar trabalho não-conservativo. Aplicando o corolário $W_{NC} = \Delta E_m$ e fazendo $h = 0$ no solo temos:

$$W_{NC} = \Delta E_m \rightarrow W_M = E_{pgf} - E_{pgi} \Leftrightarrow W_M = mgh - 0 \Leftrightarrow W_M = 1400 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}4 = 19\,208\ \mathrm{J}$$

Se considerarmos que foi o motor a adicionar a energia necessária para colocar o carro a 0,30 m/s, haverá que adicionar de 63 J ao resultado acima ($E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}1400 \cdot 0{,}30^2 = 63\ \mathrm{J}$).

Quanto ao trabalho realizado pelo peso, este é simplesmente

$$W_C = -\Delta E_{pg} \rightarrow W_{F_g} = -\left(E_{pgf} - E_{pgi}\right) = -19\,208\ \mathrm{J}$$

(b) Para calcular a potência necessária para puxar o carro pela rampa é preciso saber o intervalo de tempo necessário para o carro chegar à caixa. Este é $\Delta t = \frac{l_{\mathrm{rampa}}}{v} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{3{,}6}{0{,}30} = 12\ \mathrm{s}$. A potência de M é então

$$P_M = \frac{W_M}{\Delta t} \rightarrow P = \frac{19\,208}{12} = 1601\ \mathrm{W} \quad (1600\ \mathrm{W})$$

(c) Aqui apenas o peso, uma força conservativa, realiza trabalho. Basta aplicar $\Delta E_m = 0$:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2ghv} \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}4} = 5{,}238\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(5{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

Q4

(a) Do teorema de impulso-momento temos $I = \Delta p \rightarrow v = I/m_B$. Aplicando a conservação de momento e energia cinética na colisão (a segunda pode-se aplicar porque a colisão é elástica) vem, como função do impulso,

$$\begin{matrix} p_i = p_f \\ E_{ci} = E_{cf} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} I = m_B v_B + m_A v_A \\ \frac{1}{2} m_B \left(\frac{I}{m_B}\right)^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} I = 2v_B + v_A \\ \frac{I^2}{2} = 2v_B^2 + v_A^2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} I = 2v_B + v_A \\ I^2 = 4v_B^2 + 2v_A^2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2v_B = I - v_A \\ I^2 = (2v_B)^2 + 2v_A^2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \cdots \\ I^2 = (I - v_A)^2 + 2v_A^2 \end{matrix}$$

Retirou-se os A.S. para facilidade de visualização e resolveu-se a equação de cima em ordem a v_A porque é essa a grandeza que precisamos para resolver a alínea. Resolvendo agora a equação de baixo vem

$$I^2 = I^2 - 2Iv_a + v_A^2 + 2v_A^2 \Leftrightarrow 0 = 3v_A^2 - 2Iv_A \Leftrightarrow v_A = 0 \vee v_A = \frac{2}{3} I$$

A 1ª solução corresponde a ausência de colisão, pelo que devemos considerar a 2ª. Para I = 50 N.s temos chegada à mola com $v_A = 33{,}3 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ e, da conservação de energia mecânica na compressão da mola,

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m_A v_A^2}{k}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1{,}00 \cdot 33{,}3^2}{2800}} = 0{,}6293 \text{ m} \quad (63 \text{ cm})$$

(b) Aqui é só repetir os cálculos, trocando B por A ($I = \Delta p \rightarrow v = I/m_A$).

Seguindo a abordagem da alínea anterior, de resolver em ordem à variável necessária para resolver a alínea (neste caso v_B), temos:

$$\begin{cases} I = m_A v_A + m_B v_B \\ \frac{1}{2} m_A \left(\frac{I}{m_A}\right)^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = v_A + 2v_B \\ I^2 = v_A^2 + 2v_B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_A = I - 2v_B \\ I^2 = (I - 2v_B)^2 + 2v_B^2 \end{cases}$$

Resolvendo a equação de baixo vem

$$I^2 = I^2 - 4Iv_B + 4v_B^2 + 2v_B^2 \Leftrightarrow 0 = 6v_B^2 - 4Iv_B \Leftrightarrow v_B = 0 \vee v_B = \frac{2}{3} I$$

Apesar da velocidade de chegada à mola ser igual nos dois casos, como a massa dos blocos que a ela chegam é diferente, a compressão também o será. Para esta alínea ela a compressão é:

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m_B v_B^2}{k}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2{,}00 \cdot 33{,}3^2}{2800}} = 0{,}8900 \text{ m} \quad (89 \text{ cm})$$

Q5

(a) Seja +x a direção e sentido de atuação da força variável. À medida que F atua e o bloco se começa a mover, a força de arrasto opõe-se ao movimento, i.e., tem sentido -x. Aplicando a 2ª lei de Newton isto leva a

$$\Sigma F = ma \rightarrow m\frac{dv}{dt} = F - F_a \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F - \frac{1}{m}bv^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{10 + 5{,}0t}{2{,}0} - \frac{8{,}0v^2}{2{,}0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 5{,}0 + 2{,}5t - 4{,}0v^2$$

Esta equação é válida até $t < 3{,}0\ \mathrm{s}$, sendo depois substituída por

$$\frac{dv}{dt} = -4{,}0v^2$$

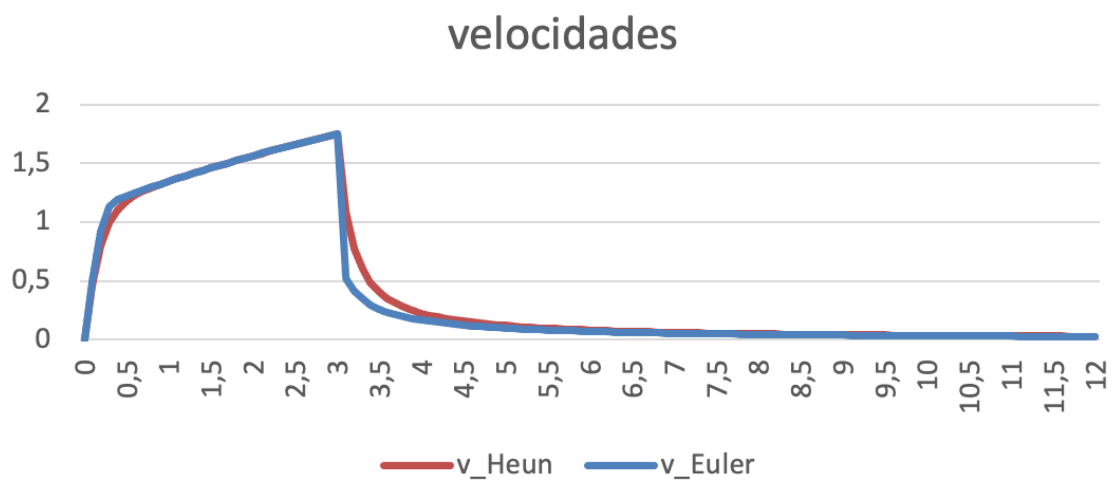
(b) Tabela Heun: (note-se a mudança de comportamento para o instante em que F cessa de atuar, t = 3,0 s)

***t* (s)**	***v* (m/s)**	***k1***	***k2***
0	0	5	4,25
0,1	0,4625	4,394375	2,246035
0,2	0,7945205	2,9749487	0,9800097
0,3	0,9922684	1,8116135	0,4922503
0,4	1,1074616	1,0941151	0,3268792
0,5	1,1785113	0,6944442	0,2704258
(...)			

2,9	1,7368392	0,1835579	0,1771617
3	1,7548752	-12,31835	-1,094285
3,1	1,0842436	-4,702336	-1,508033
(...)			
9	0,0409407	-0,006705	-0,006487
9,1	0,0402811	-0,00649	-0,006283
9,2	0,0396425	-0,006286	-0,006088

O bloco reduz velocidade para os 4,00 cm/s entre 9,1 e 9,2 s.

Gráfico:



Note-se a diferença entre algoritmos e a maior precisão de Heun, com curvas mais arredondadas.

CRÉDITOS

Nuno Sousa, UAb