



Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 24 de abril a 4 de maio de 2025

Data de Limite de Entrega

4 de maio de 2025, até às 23h59 de Portugal Continental

Tema

Teoria de Números

CrITÉRIOS de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Com exceção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Nas questões 4 a 7 não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorreta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1-3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	0.9			

4.	5.	6.	7.
0.8 val.	0.7 val.	0.8 val.	0,8 val.

Normas a respeitar

O E-fólio é uma prova **inteiramente** individual. Isto significa que deverá realizar a prova sozinho(a), sem a ajuda de colegas, ou de terceiras pessoas, e sem a ajuda de ferramentas de inteligência artificial. As únicas ajudas que pode utilizar são os materiais disponibilizados no Espaço Central do curso (<https://elearning.uab.pt/course/view.php?id=21319>).

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 6 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira, Ana Nunes, José Agapito e Nelson Faustino

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas.

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, considere as seguintes afirmações:

(i) $\text{mdc}(ac, bc) = c \cdot \text{mdc}(a, b)$

(ii) $\text{mdc}(a, b) < \text{mmc}(a, b)$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- A) As duas afirmações são verdadeiras
- B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa
- C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira
- D) As duas afirmações são falsas

2. Considere as seguintes afirmações:

(i) $a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \implies ac + bd \equiv bc + ad \pmod{n}$

(ii) $a \equiv b \pmod{n} \wedge c \equiv d \pmod{n} \implies (ac)^3 \equiv (bd)^3 \pmod{n}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- A) As duas afirmações são verdadeiras
- B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa
- C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira
- D) As duas afirmações são falsas

3. Dado $p > 2$ um número primo, considere as seguintes afirmações:

(i) Para qualquer um número ímpar a existe solução inteira da equação $ax \equiv 1 \pmod{p}$

(ii) Para qualquer um número par b existe solução inteira da equação $bx \equiv 1 \pmod{p}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- A) As duas afirmações são verdadeiras
- B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa
- C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira
- D) As duas afirmações são falsas

Nas questões seguintes justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

4. Mostre que

$$a^{12} \equiv b^{12} \pmod{91} \implies \text{mdc}(a, 91) = \text{mdc}(b, 91).$$

5. Um número natural $N \neq 0$ diz-se um número perfeito se $2N$ for igual à soma de todos os divisores positivos de N ¹.

Dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n - 1$ é um número primo, mostre que

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

é um número perfeito.

6. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n - 1$ é um número primo. Prove que n é número primo.

7. Dados dois números naturais $n, m > 0$, mostre que

$$\text{mdc}(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\text{mdc}(n, m)} - 1.$$

FIM

¹Por exemplo, 6 é um número perfeito, uma vez que 1, 2, 3 e 6 são todos os divisores positivos de 6 e tem-se $2 \times 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Mas 3 já não é um número perfeito, pois $2 \times 3 \neq 1 + 3$.