Análise Infinitesimal
21175 — ano lectivo 2022-2023
13 de janeiro de 2023

e-fólio B — proposta de resolução

1. Considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{7+(-1)^t x}}{x-t} = \begin{cases} \frac{x^2\sqrt{7-x}}{x-t} & \text{se } t \text{ é ímpar} \\ \frac{x^2\sqrt{7+x}}{x-t} & \text{se } t \text{ é par} \end{cases}$$

onde $t \in T = \{1,2,3,4,5,6\}$ é o número da Turma.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Usando a definição, prove que f é diferenciável no ponto $x = 0$ e calcule $f'(0)$.

(c) Estude a existência de assíntotas verticais ao gráfico de f.

Resolução:

a) Para determinar o domínio da função f vamos estudar as funções a partir das quais f é obtida.

A função f é um quociente de duas funções e a função no denominador, $f_1 = x - t$ tem domínio $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Logo, a única restrição resultante desta função tem a ver com a sua condição de denominador e, portanto, não se poder anular no domínio de f:

$$\{x \in \mathbb{R} : x - t \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq t\} = \mathbb{R} \setminus \{t\}.$$

Para t ímpar: No numerador temos o produto da função $f_2 = x^2$, definida em $D_{f_2} = \mathbb{R}$, pela função $f_3 = \sqrt{7-x}$, que apenas está definida

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

para

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} : 7 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 7\} =]-\infty, 7]\,.$$

Portanto o domínio de f é

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{f_1} \wedge x \in D_{f_2} \wedge x \in D_{f_3} \wedge x - t \neq 0\}\,,$$

o que dá a intersecção

$$D_f = (\,\mathbb{R} \setminus \{t\}\,) \cap]-\infty, 7] =]-\infty, 7] \setminus \{t\}.$$

Para t par: No numerador temos o produto da função $f_2 = x^2$, definida em $D_{f_2} = \mathbb{R}$, pela função $f_3 = \sqrt{7+x}$, que apenas está definida para

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} : 7 + x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -7\} = [-7, +\infty[\,.$$

Portanto o domínio de f é

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{f_1} \wedge x \in D_{f_2} \wedge x \in D_{f_3} \wedge x - t \neq 0\}\,,$$

o que dá a intersecção

$$D_f = (\,\mathbb{R} \setminus \{t\}\,) \cap [-7, +\infty[= [-7, +\infty[\setminus \{t\}.$$

b) O ponto $x = 0$ pertence ao domínio da função f. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x},$$

dado $f(0) = \frac{0\times\sqrt{7}}{-t} = 0$.

Substituindo a expressão da função f obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\sqrt{7+(-1)^t x}}{x-t}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{7+(-1)^t x}}{x-t} = \frac{0\times\sqrt{7}}{-t} = 0,$$

dado $t \neq 0$.

O limite anterior pode ser calculado directamente pois no numerador temos uma função contínua no seu domínio (dado ser o produto da identidade pela raiz quadrada de uma função contínua resultante da

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

soma, ou diferença, de uma constante e da identidade) e no denominador temos uma função contínua dado ser a diferença entre a identidade e uma constante.

Como o limite existe então a função f é diferenciável no ponto $x = 0$. Para além disso $f'(0)$ tem o valor do limite, isto é $f'(0) = 0$.

c) A função f é contínua no seu domínio dado ser o quociente de duas funções contínuas. A justificação para a continuidade dessas funções é dada na alínea anterior, com o monómio x^2 em vez da identidade no numerador.

Como f é contínua no seu domínio então não existem assíntotas verticais em D_f. Podem existir assíntotas verticais em pontos aderentes ao domínio D_f que não pertençam ao domínio. Neste caso o único candidato é o ponto $x = t$. Se se verificar, para algum dos limites laterais

$$\lim_{x\to t^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to t^+} f(x) = \pm\infty$$

então a recta de equação $x = t$ é uma assíntota ao gráfico de f. Vamos calcular

$$\lim_{x\to t^-} f(x) = \lim_{x\to t^-} \frac{x^2\sqrt{7+(-1)^t x}}{x-t}.$$

Podemos fazer o cálculo directo dos seguintes limites, dado as funções envolvidas serem contínuas. No numerador temos $\lim\limits_{x\to t^-} = x^2\sqrt{7+(-1)^t x} = t^2\sqrt{7+(-1)^t t} > 0$ e no denominador temos $\lim\limits_{x\to t^-} x - t = 0^-$, isto é, temos um valor negativo que tende para zero pois x tende para t por valores inferiores a t e $x < t \Rightarrow x - t < t - t = 0$.

Portanto $\lim\limits_{x\to t^-} f(x) = -\infty$ e podemos concluir que a recta vertical $x = t$ é uma assíntota ao gráfico de f.

(Analogamente, podemos calcular $\lim\limits_{x\to t^-} f(x) = \lim\limits_{x\to t^-} \dfrac{x^2\sqrt{7+(-1)^t x}}{x-t}$. O limite do numerador é um valor positivo, tal como no caso anterior, e o limite do denominador é 0^+ pois x tende para t por valores superiores a t e $x > t \Rightarrow x - t > t - t = 0$. Assim, este limite lateral dá $+\infty$.)

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

2. Calcule o limite seguinte:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(x+a)} \ln(e^x + tx + b),$$

onde $t \in T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o número da Turma e as constante a e b são obtidas em função de t, com $a(t) = t - 3$ e $b(t) = 5 - t$, de onde resulta $a \in A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $b \in B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Resolução: O ponto da recta estendida $+\infty$ é aderente ao domínio da função pois, para x suficientemente grande, temos $x > -a$ e, portanto, o denominador não se anula, e ainda $e^x + tx \geq -b$ e, portanto $e^x + tx + b \geq 0$ e a função $\ln(e^x + tx + b)$ está definida.

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x+a) = +\infty$. Por outro lado, temos $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $t > 0$, de onde resulta $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + tx + b = +\infty$ e, portanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x + tx + b) = +\infty$. Logo o limite pedido dá uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Vamos tentar usar a Regra de Cauchy para resolver este limite. Seja $f(x) = \ln(e^x + tx + b)$ e $g(x) = 2(x + a)$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Consideremos o intervalo $I =]2, +\infty[$ ou outro da forma $I =]c, +\infty[$ onde c é escolhido tal que em I a função $f(x)$ esteja definida e $g(x)$ não se anule (escolhendo um valor de c inteiro, teremos $c \geq 2$ para a turma 1, $c \geq 1$ para a turma 2 e $c \geq 0$ para as turmas 3 a 6). Neste intervalo as funções $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis pois $f(x)$ é a composição da função diferenciável $\ln(x)$ e da adição das funções diferenciáveis e^x, a função obtida pelo produto da constante t com a identidade x, e a constante b, e $g(x)$ é uma função diferenciável pois é o produto de uma constante com a adição de outra constante e a identidade x.

As derivadas das funções são

$$f'(x) = (\ln(e^x + tx + b))' = \frac{(e^x + tx + b)'}{e^x + tx + b} = \frac{e^x + t}{e^x + tx + b}$$

que está definida em I e

$$g'(x) = (2(x + a))' = 2,$$

que está definida e não se anula em I.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

Vamos agora calcular o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+t}{e^x+tx+b}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+t}{2(e^x+tx+b)}.$$

Temos no numerador $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+t) = +\infty$ e, no denominador, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(e^x+tx+b) = +\infty$. Vamos então usar novamente a Regra de Cauchy. Sendo $f_1(x) = e^x + t$ e $g_1(x) = 2(e^x+tx+b)$ temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Escolhendo I semelhante ao anterior, temos que $f_1(x)$ e $g_1(x)$ são ambas diferenciáveis, $f_1'(x) = e^x$ e $g_1'(x) = 2(e^x+t)$, e $g'(x)$ não se anula em I.

Calculamos o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2(e^x+t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(1+\frac{t}{e^x})} = \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

Podemos então concluir, pela Regra de Cauchy, que também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+t}{2(e^x+tx+b)} = \frac{1}{2}$$

e, novamente pela Regra de Cauchy, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(x+a)} \ln(e^x+tx+b) = \frac{1}{2}.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

3. Considere a seguinte função

$$g(x) = (-1)^{t+1} tx\, e^{(-1)^t (7-t)x} = \begin{cases} tx\, e^{-(7-t)x} & \text{se } t \text{ é ímpar} \\ \\ -tx\, e^{(7-t)x} & \text{se } t \text{ é par} \end{cases}$$

onde $t \in T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o número da Turma.

(a) Faça o estudo da função respondendo às seguintes questões:

i. Determine o domínio de g.

ii. Calcule os zeros da função g.

iii. Estude a continuidade da função g.

iv. Verifique se g é uma função par ou ímpar.

v. Estude a existência de assíntotas ao gráfico de g.

vi. Calcule a derivada da função g.

vii. Estude a monotonia e encontre os extremos locais da função g.

viii. Calcule a segunda derivada da função g.

ix. Estude a concavidade e encontre os pontos de inflexão de g.

(b) Desenhe o gráfico de g representando claramente as características estudadas na alínea anterior, incluindo os pontos e as assíntotas encontradas.

Resolução: a) i. A função $g(x)$ tem domínio $\mathbb{R}$ pois é o produto de um monómio (produto de uma constante pela função identidade) pela composição da função exponencial com outro monómio, funções que estão definidas em todo o $\mathbb{R}$.

ii. $g(x) = 0 \Leftrightarrow (-1)^{t+1} tx = 0 \vee e^{(-1)^t (7-t)x} \Leftrightarrow x = 0$ pois a exponencial nunca se anula.

iii. A função $g(x)$ é contínua pois é o produto de um monómio (produto de uma constante pela função identidade) pela composição da função exponencial com outro monómio, sendo os monómios e a função exponencial contínuas.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

iv. $g(-x) = (-1)^{t+1}t(-x)\,e^{(-1)^t(7-t)(-x)} = (-1)^t tx\,e^{(-1)^{t+1}(7-t)x}$, difere de $g(x)$, pelo que a funçao não é par, e difere de $-g(x)$, pelo que a função também não é ímpar.

v. Como o domínio é $\mathbb{R}$ e a função é contínua no seu domínio então o gráfico não tem assíntotas verticais. Vamos procurar assíntotas horizontais e oblíquas.

Para t ímpar: Podemos calcular directamente os limites seguintes pois as funções envolvidas são contínuas. Calculamos o limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{tx\,e^{-(7-t)x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} t\,e^{-(7-t)x} = +\infty$, pois $7-t>0$ e para valores de x negativos temos $-(7-t)x>0$. Isto é, não existem assíntotas quando x tende para $-\infty$.

Calculamos agora o limite

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{tx\,e^{-(7-t)x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} t\,e^{-(7-t)x} = t\times 0 = 0$. Então se existir uma assíntota ao gráfico quando x tende para $-\infty$, esta será horizontal, isto é, terá declive $m=0$. Vamos agora calcular o limite

$\lim\limits_{x\to-\infty} (g(x) - m\times x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - 0\times x) = \lim\limits_{x\to+\infty} tx\,e^{-(7-t)x}$, limite este que dá uma indeterminação do tipo $\infty\times 0$. Podemos transformar esta indeterminação numa do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ reescrevendo o limite da forma $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{tx}{e^{(7-t)x}}$ e usando de seguida a Regra de Cauchy para o calcular. Seja $I=\mathbb{R}$, as funções no numerador e no denominador de quociente considerado são ambas diferenciáveis em I (dado serem, respectivamente, o produto de uma constante pela identidade, e a composição da exponencial com o produto de uma constante pela identidade), com $(tx)' = t$ e $(e^{(7-t)x})' = (7-t)e^{(7-t)x}$, e a função $(7-t)e^{(7-t)x}$ nunca se anula em $\mathbb{R}$. Para além disso, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(tx)'}{(e^{(7-t)x})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{t}{(7-t)e^{(7-t)x}} = 0$, o que permite concluir, pela regra de Cauchy, que

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - 0\times x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{tx}{e^{(7-t)x}} = 0.$$

Logo, a assíntota existe e tem ordenada na origem $b=0$. Portanto, quando x tende para $-\infty$ o gráfico da função tem como assíntota a recta de equação $y=0$.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

Para t par: Podemos calcular directamente os limites seguintes pois as funções envolvidas são contínuas. Calculamos o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-tx\, e^{(7-t)x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} -t\, e^{(7-t)x} = -\infty$, pois $7-t>0$. Isto é, não existem assíntotas quando x tende para $+\infty$.

Calculamos agora o limite

$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-tx\, e^{(7-t)x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -t\, e^{(7-t)x} = -t\times 0 = 0$. Então se existir uma assíntota ao gráfico quando x tende para $-\infty$, esta será horizontal, isto é, terá declive $m=0$. Vamos agora calcular o limite

$\lim_{x\to-\infty} (g(x) - m\times x) = \lim_{x\to-\infty} (g(x) - 0\times x) = \lim_{x\to-\infty} -tx\, e^{(7-t)x}$, limite este que dá uma indeterminação do tipo $\infty\times 0$. Podemos transformar esta indeterminação numa do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ reescrevendo o limite da forma $= \lim_{x\to-\infty} \frac{-tx}{e^{-(7-t)x}}$ e usando de seguida a Regra de Cauchy para o calcular. Seja $I=\mathbb{R}$, as funções no numerador e no denominador de quociente considerado são ambas diferenciáveis em I (dado serem, respectivamente, o produto de uma constante pela identidade, e a composição da exponencial com o produto de uma constante pela identidade), com $(-tx)' = -t$ e $(e^{-(7-t)x})' = -(7-t)e^{-(7-t)x}$, e a função $-(7-t)e^{(7-t)x}$ nunca se anula em $\mathbb{R}$. Para além disso, $\lim_{x\to-\infty} \frac{(-tx)'}{(e^{-(7-t)x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-t}{-(7-t)e^{-(7-t)x}} = 0$, o que permite concluir, pela regra de Cauchy, que

$$\lim_{x\to-\infty} (g(x) - 0\times x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-tx}{e^{-(7-t)x}} = 0.$$

Logo, a assíntota existe e tem ordenada na origem $b=0$. Portanto, quando x tende para $-\infty$ o gráfico da função tem como assíntota a recta de equação $y=0$.

vi. A função g é derivável em $\mathbb{R}$ pois é o produto de um monómio (produto de uma constante pela função identidade) pela composição da função exponencial com outro monómio, sendo os monómios e a função exponencial deriváveis em $\mathbb{R}$. A função derivada é, para t ímpar,

$g'(x) = (tx\, e^{-(7-t)x})' = t\, e^{-(7-t)x} - (7-t)tx\, e^{-(7-t)x} = [t-(7-t)tx]\, e^{-(7-t)x}$,

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

e, para t par,

$$g'(x) = (-tx\, e^{(7-t)x})' = -t\, e^{(7-t)x} - (7-t)tx\, e^{(7-t)x} = -\left[t + (7-t)tx\right] e^{(7-t)x}.$$

vii. **Para t ímpar:** Começamos por procurar os pontos em que a primeira derivada se anula.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[t - (7-t)tx\right] e^{-(7-t)x} = 0 \Leftrightarrow t - (7-t)tx = 0 \vee e^{-(7-t)x} = 0$$

e, como a exponencial não se anula, a equação anterior é equivalente a $(7-t)tx = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{7-t}$.

Vamos estudar o sinal da primeira derivada. Como a função exponencial é sempre estritamente positiva então o sinal da primeira derivada é dado pelo sinal do factor $t - (7-t)tx$, isto é $g'(x) > 0 \Leftrightarrow t - (7-t)tx > 0 \Leftrightarrow (7-t)tx < t$, pois $t > 0$, e, dado $7 - t > 0$, resulta que $x < \frac{1}{7-t}$. Como a função é diferenciável então é monótona crescente no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{7-t}\right[$. Analogamente, temos $g'(x) < 0 \Leftrightarrow t - (7-t)tx < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{7-t}$, pelo que a função é monótona decrescente no intervalo $\left]\frac{1}{7-t}, +\infty\right[$.

Os extremos locais de g têm derivada nula, logo o ponto $x = \frac{1}{7-t}$ é o único candidato a extremo da função. Pela ponto viii, a seguir, temos $g''\left(\frac{1}{7-t}\right) = -(7-t)t\,(2-1)\,e^{-1} = -\frac{(7-t)t}{e}$. Como a exponencial e os factores t e $7-t$ são positivos, então $g''\left(\frac{1}{7-t}\right) < 0$.

Logo, sendo g duas vezes diferenciável, $g'\left(\frac{1}{7-t}\right) = 0$ e $g''\left(\frac{1}{7-t}\right) < 0$, podemos concluir que g tem um máximo local: $g\left(\frac{1}{7-t}\right) = \frac{t}{7-t}\,\frac{1}{e}$.

Para t par: Começamos por procurar os pontos em que a primeira derivada se anula.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\left[t + (7-t)tx\right] e^{(7-t)x} = 0 \Leftrightarrow t + (7-t)tx = 0 \vee e^{(7-t)x} = 0$$

e, como a exponencial não se anula, a equação anterior é equivalente a $(7-t)tx = -t \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7-t}$.

Vamos estudar o sinal da primeira derivada. Como a função exponencial é sempre estritamente positiva então o sinal da primeira derivada é dado pelo sinal do factor $-\left[t + (7-t)tx\right]$, isto é $g'(x) > 0 \Leftrightarrow t + (7-t)tx < 0 \Leftrightarrow (7-t)tx < -t$ e, dado $t > 0$ e $7 - t > 0$,

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

resulta que $x < -\frac{1}{7-t}$. Como a função é diferenciável então é monótona crescente no intervalo $\left]-\infty, -\frac{1}{7-t}\right[$. Analogamente, temos $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -t-(7-t)tx < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7-t}$, pelo que a função é monótona decrescente no intervalo $\left]-\frac{1}{7-t}, +\infty\right[$.

Os extremos locais de g têm derivada nula, logo o ponto $x = -\frac{1}{7-t}$ é o único candidato a extremo da função. Pela ponto viii, a seguir, temos $g''\left(-\frac{1}{7-t}\right) = -(7-t)t\,(2-1)\,e^{-1} = -\frac{(7-t)t}{e}$. Como a exponencial e os factores t e $7-t$ são positivos, então $g''\left(-\frac{1}{7-t}\right) < 0$.

Logo, sendo g duas vezes diferenciável, $g'\left(-\frac{1}{7-t}\right) = 0$ e $g''\left(-\frac{1}{7-t}\right) < 0$, podemos concluir que g tem um máximo local: $g\left(-\frac{1}{7-t}\right) = \frac{t}{7-t}\,\frac{1}{e}$.

viii. A função $g'(x)$, é derivável pois é o produto de um polinómio de grau 1, diferenciável em $\mathbb{R}$ pela composição das funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$: exponencial e monómio de grau 1. Assim podemos calcular a sua derivada.

Para t ímpar: Temos $g''(x) = \left([t-(7-t)tx]\,e^{-(7-t)x}\right)' =$
$= -(7-t)te^{-(7-t)x} - [t-(7-t)tx]\,(7-t)e^{-(7-t)x} =$
$= -(7-t)t\,[2-(7-t)x]\,e^{-(7-t)x}$.

Para t par: Temos $g''(x) = \left(-\,[t+(7-t)tx]\,e^{(7-t)x}\right)' =$
$= -(7-t)te^{(7-t)x} - [t+(7-t)tx]\,(7-t)e^{(7-t)x} =$
$= -(7-t)t\,[2+(7-t)x]\,e^{(7-t)x}$.

ix. **Para t ímpar:** Começamos por procurar os pontos em que a segunda derivada se anula.

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2-(7-t)x = 0 \vee e^{-(7-t)x} = 0$$

e, como a exponencial não se anula, a equação anterior é equivalente a $(7-t)x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7-t}$.

Vamos estudar o sinal da segunda derivada. Como a função exponencial é sempre estritamente positiva então o sinal da segunda derivada é dado pelo sinal do factor $-(7-t)t\,[2-(7-t)x]$. Dado $-(7-t)t < 0$, então $g''(x) > 0$ quando $2-(7-t)x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{7-t}$, isto é, quando

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

$x \in \left]\frac{2}{7-t}, +\infty\right[$. Como a função é duas vezes diferenciável então tem a concavidade para cima no intervalo $\left]\frac{2}{7-t}, +\infty\right[$.

Analogamente, temos $g''(x) < 0 \Leftrightarrow 2-(7-t)x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{7-t}$, pelo que a função tem a concavidade para baixo no intervalo $\left]-\infty, \frac{2}{7-t}\right[$.

O ponto de inflexão, em que muda a concavidade, é o ponto $x = \frac{2}{7-t}$, onde a função vale $g\left(\frac{2}{7-t}\right) = \frac{2t}{7-t}\,\frac{1}{e^2}$.

Para t par: Começamos por procurar os pontos em que a segunda derivada se anula.

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2+(7-t)x = 0 \ \vee \ e^{(7-t)x} = 0$$

e, como a exponencial não se anula, a equação anterior é equivalente a $(7-t)x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{7-t}$.

Vamos estudar o sinal da segunda derivada. Como a função exponencial é sempre estritamente positiva então o sinal da segunda derivada é dado pelo sinal do factor $-(7-t)t\,[2+(7-t)x]$. Dado $-(7-t)t < 0$, então $g''(x) > 0$ quando $2+(7-t)x < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{7-t}$, isto é, quando $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{7-t}\right[$. Como a função é duas vezes diferenciável então tem a concavidade para cima no intervalo $\left]-\infty, -\frac{2}{7-t}\right[$.

Analogamente, temos $g''(x) < 0 \Leftrightarrow 2+(7-t)x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7-t}$, pelo que a função tem a concavidade para baixo no intervalo $\left]-\frac{2}{7-t}, +\infty\right[$.

O ponto de inflexão, em que muda a concavidade, é o ponto $x = -\frac{2}{7-t}$, onde a função vale $g\left(-\frac{2}{7-t}\right) = \frac{2t}{7-t}\,\frac{1}{e^2}$.

b) O gráfico da função é

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

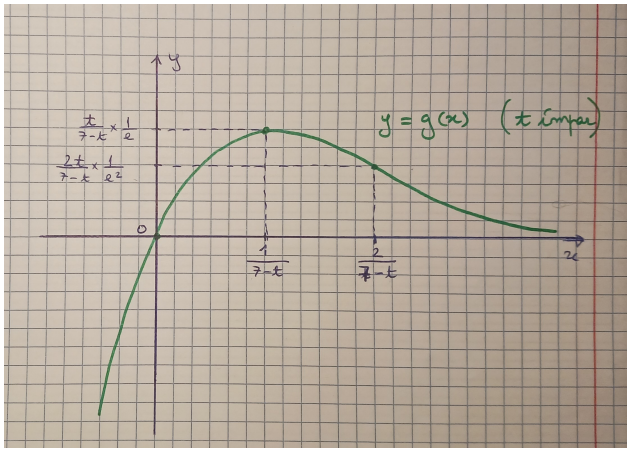

Figura 1: Esboço do gráfico de g para t ímpar.

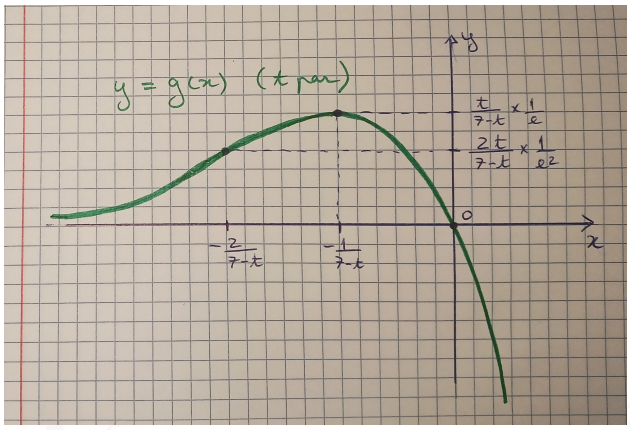

Figura 2: Esboço do gráfico de g para t par.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

4. Seja $h(x)$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ com $h(0) = 0$ e $h''(x)$ contínua, e seja $f(x) = h(x) + \cos(h(x) - x)$ uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 1, no ponto $x_0 = 0$, é $p_1(x) = 1+ax$, onde a é um dos elementos do conjunto $A = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$. Sabendo que $f''(0) = 0$, diga qual o valor de $h''(0)$ e qual a concavidade da função $h(x)$ numa vizinhança de $x = 0$.

Resolução: Sendo a função h duas vezes diferenciável então podemos concluir que $h'(x)$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ e, portanto, que $h(x)$ também é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

A função $f(x)$ é diferenciável pois resulta da soma da função diferenciável $h(x)$ com a composição das funções diferenciáveis $\cos(x)$ e $h(x) - x$, sendo esta última diferenciável pois é a diferença das funções diferenciáveis $h(x)$ e a identidade x, e $y = h(x) - x$ pertence ao domínio de $\cos(y)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ pois o domínio do cosseno é $\mathbb{R}$ (esta justificação pode ser substituída pela referência ao polinómio de Taylor de grau 1 de f numa vizinhança de $x = 0$ e, portanto, à existência da derivada de f nessa vizinhança).

Podemos então calcular a derivada de $f(x)$:

$f'(x) = h'(x) + (\cos(h(x) - x))' = h'(x) - \sin(h(x) - x)\ (h(x) - x)'$ e obtemos

$$f'(x) = h'(x) - \sin(h(x) - x)\ (h'(x) - 1)\,. \qquad (1)$$

Sabendo que o polinómio de Taylor de ordem 1 de f no ponto $x_0 = 0$ é $p_1(x) = 1 + ax = 1 + a(x - 0) = f(0) + f'(0)(x - 0)$ então podemos concluir que $f(0) = 1$ e que $f'(0) = a$.

A partir da expressão (1) temos $f'(0) = h'(0) - \sin(h(0) - 0)\ (h'(0) - 1) =$
$= h'(0) - \sin(0)(h'(0) - 1)$, pois $h(0) = 0$. O que nos permite concluir que $f'(0) = h'(0)$ e, portanto, que $h'(0) = a$.

A função $f'(x)$ é diferenciável pois resulta da soma da função diferenciável $h'(x)$ com o produto de $h'(x) - 1$ com a composição das funções diferenciáveis $\sin(x)$ e $h(x) - x$, sendo esta última diferenciável pois é a diferença das funções diferenciáveis $h(x)$ e a identidade x, e $y = h(x) - x$ pertence ao domínio de $\sin(y)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ pois o domínio do seno é $\mathbb{R}$.

Podemos então calcular a segunda derivada de f:

$f''(x) = h''(x) - [\sin(h(x) - x)\ (h'(x) - 1)]' =$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

$= \; h''(x) - \left[(\sin(h(x)-x))' \; (h'(x)-1) + \sin(h(x)-x) \; (h'(x)-1)'\right]$, de onde resulta

$$f''(x) = h''(x) - \left[\cos(h(x)-x) \; (h'(x)-1)^2 + \sin(h(x)-x) \; h''(x)\right].$$

Calculando para $x = 0$ obtemos

$f''(0) = h''(0) - \left[\cos(h(0)-0) \; (h'(0)-1)^2 + \sin(h(0)-0) \; h''(0)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; 0 = h''(0) - \left[\cos(0) \; (a-1)^2 + \sin(0) \; h''(0)\right]$, dado $f''(0) = 0$, e, portanto, $0 = h''(0) - (a-1)^2 \Leftrightarrow h''(0) = (a-1)^2$. Substituindo a constante a por cada um dos elementos do conjunto A, concluímos que $h''(0)$ é um dos elementos do conjunto $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

Sendo o valor de $h''(0) > 0$ e $h''(x)$ contínua então podemos concluir que numa vizinhança de $x = 0$ a função $h(x)$ tem a concavidade voltada para cima.

<u>Nota 1</u>: Sabendo apenas que $h''(0) > 0$ não nos permite tirar conclusões acerca da concavidade numa vizinhança de $x = 0$. É necessário, para esta conclusão, ter informação acerca da continuidade de $h''(x)$ numa vizinhança de $x = 0$ ou, em alternativa, informação de que $h''(x)$ é positiva numa vizinhança de $x = 0$.

<u>Nota 2</u>: O enunciado da Proposição 5 da página 127 das Notas de Cálculo para Informática está errado pois afirma que é suficiente a condição $h''(0) > 0$ para concluir acerca da concavidade numa vizinhança de $x = 0$. As respostas ao e-fólio B baseadas neste resultado foram naturalmente consideradas válidas.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt