# ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

**Período de Realização**

Decorreu no dia 9 de junho de 2021

**Proposta de Resolução**

1 Seja:

- $O_i$ o evento que o ovo de chocolate $i$ é defeituoso (tem o recheio errado);
- $R$ o evento que o ovo de chocolate foi produzido na fábrica Recheios & Companhia;
- $D$ o evento que o ovo de chocolate foi produzido na fábrica Delicias & Chocolate;

*(10% cotação)*
Pelo enunciado temos: $P(R) = P(D) = 1/2$, $P(O_i|R) = 0.05$ e $P(O_i|D) = 0.01$. *(10% cotação)*
Pretende-se saber:

$$P(O_2|O_1)$$

*(10% cotação)*

$$P(O_2|O_1) = \frac{P(O_1O_2)}{P(O_1)} = \frac{P(O_1O_2|R)P(R) + P(O_1O_2|D)P(D)}{P(O_1|R)P(R) + P(O_1|D)P(D)} =$$

*(40% cotação)*

$$\frac{(0.05)^2(1/2) + (0.01)^2(1/2)}{(0.05)(1/2) + (0.01)(1/2)} = \frac{13}{300} = 0.0433(33)$$

*(30% cotação)*

2.

**2.1** $X$ é v.a. tempo após as 7:00:00 em que chega um turista às caves até às 7:30:00, considerando minutos $X \in [0-30]$ e $X \sim Uniforme(0,30)$, então o tempo de espera pela visita também é uma v.a. com distribuição uniforme, sabendo que existem visitas às 7:15:00 e as 7:30:00, no máximo o turista espera 15 minutos.
$Y$ - v.a. tempo em minutos que um turista (que chega entre as 7:00:00 e as 7:30:00) espera pela visita e que existem visitas às 7:15:00 e as 7:30:00. $Y \sim Uniforme(0,15)$. *(20% cotação)*
A f.d.p. de $Y$ é:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{15-0} = \frac{1}{15} & 0 \leq y \leq 15 \\ 0 & \dots \end{cases}$$

*(20% cotação)*
Pretende-se saber a probabilidade de o turista esperar menos de 5 minutos pela visita:

$$P(Y < 5) = P(0 \leq Y < 5) =$$

*(30% cotação)*

$$= \frac{5-0}{15} = \frac{1}{3}$$

*(30% cotação)*

Note que a pergunta também poderia ter sido resolvida apartir de $X$ determinando a $P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30)$.

**2.2**

$$P(Y \geq 12) = P(12 \leq Y \leq 15) =$$

*(50% cotação)*

$$= \frac{15-12}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$$

*(50% cotação)*
Note que a pergunta também poderia ter sido resolvida apartir de $X$ determinando a $P(0 < X < 3) + P(15 < X < 18)$.

**2.3**

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 =$$

*(20% cotação)*

$$= \frac{1}{15}\int_0^{15} y^2\,dy - \left(\frac{1}{15}\int_0^{15} y\,dy\right)^2 =$$

*(40% cotação)*

$$= \frac{(15-0)^2}{12} = 18,75$$

*(40% cotação)*
Considerado correto se utilizasse a fórmula da variância de uma distribuição uniforme contínua.

3. Sejam $X_1$ e $X_2$ v.a. que representam os totais de precipitação em Faro para os próximos dois anos, respetivamente, ambas com distribuição normal e $E(X_1) = E(X_2) = 12.08$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 3.1$.

**3.1** Total da precipitação na cidade de Faro nos próximos 2 anos $= X_1 + X_2$, que também segue uma distribuição normal com $E(X_1+X_2) = 24.16$ e $Var(X_1 + X_2) = 2 \times (3.1)^2 = 19.22$ *(20% cotação)*
Pretende-se:

$$P(X_1 + X_2 > 25)$$

*(20% cotação)*

$$P(X_1 + X_2 > 25) = P\left(\frac{X_1 + X_2 - 24.16}{\sqrt{19.22}} > \frac{25 - 24.16}{\sqrt{19.22}}\right) =$$

*(20% cotação)*

$$= P(Z > 0.1916) = 1 - P(Z < 0.1916)$$

*(20% cotação)*
com $Z \sim N(0, 1)$, e pela tabela da distribuição normal reduzida

$$\cong 0.4240$$

Existe uma probabilidade de 42.4% que o total da precipitação na cidade de Faro nos próximos 2 anos exceda 25 *dm*. *(20% cotação)*

**3.2** Como $-X_2$ também é uma v.a. com distribuição normal e $E(-X_2) = -12.08$ e $Var(-X_2) = (-1)^2(3.1)^2$, temos que $X_1 - X_2$ segue uma distribuição normal e $E(X_1 - X_2) = 0$ e $Var(X_1 - X_2) = 19.22$. *(20% cotação)*
Pretende-se:

$$P(X_1 > X_2 + 3) = P(X_1 - X_2 > 3) =$$

*(20% cotação)*

$$= P\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{19.22}} > \frac{3}{\sqrt{19.22}}\right) =$$

*(20% cotação)*

$$P(Z > 0.6843) = 1 - P(Z < 0.6843)$$

*(20% cotação)*
com $Z \sim N(0,1)$, e pela tabela da distribuição normal reduzida

$$\cong 0.2469$$

Existe uma probabilidade de 24.69% que a precipitação do próximo ano exceda a precipitação do ano seguinte por mais de 3 *dm*.
*(20% cotação)*

4.

**4.1** $X \sim Bin(n,p)$

$$E(X) = np = 7 \quad Var(X) = np(1-p) = 2.1$$

$$\Rightarrow n = 10 \quad p = 0.7$$

*(40% cotação)*

$$P(X = 4) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 4 \end{array}\right)(0.7)^4(0.3)^6 =$$

*(40% cotação)*

$$= 0.0368$$

*(20% cotação)*

**4.2** Seria considerado correto se apenas fosse dito que como $n = 10 < 12$ a probabilidade de $X > 12$ é zero, dado que a $P(X \leq 10) = 1$.
*(100% cotação)*
Resolução alternativa:

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) =$$

*(30% cotação)*

$$= 1 - \sum_{i=0}^{12} \left( \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) (0.7)^i (0.3)^{10-i} =$$

*(50% cotação)*

$$= 0$$

*(20% cotação)*

FIM