Matemática Preparatória (21160) – unidade extra curricular
2015/16
E-Fólio B – 28 dezembro 2015 a 11 janeiro 2016
Critérios de correção e orientações de resposta

Questão 1 (0.5 val)

Considere a sucessão de números reais definida por $U_n = 2n + 1$

a) (0.2 v) Justifique que a sucessão é uma progressão aritmética e indique o valor da razão.

Para justificar que uma sucessão é uma progressão aritmética basta **provar que a diferença entre dois quaisquer termos consecutivos da sucessão é constante.**

Assim, considerando a diferença entre 2 termos consecutivos em geral (e não para casos concretos, como seja $u_4 - u_3$, por exemplo), deduzimos o seguinte $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2$, $n \in N$ .A diferença entre dois quaisquer termos consecutivos da progressão é um valor constante, que é 2, logo a sucessão é uma progressão aritmética. **A razão da progressão é 2**.

b) (0.3 v) Para que valores de $\boldsymbol{n}$ se tem $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n > 960.$

Pretende-se determinar a ordem $\boldsymbol{n}$, a partir da qual a soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos da sucessão é superior a 960.

Sabemos que a soma dos **n** primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$.

Assim, basta determinar n que satisfaça a desigualdade: $S_n > 960$.

Ora, $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$$S_n > 960 \Leftrightarrow \frac{3 + 2n + 1}{2} \times n > 960 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 960 > 0$$

Cálculo auxiliar

Zeros:

$$n^2 + 2n - 960 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-960)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -32 \vee n = 30$$

Dado que $n \in \aleph$, $n^2 + 2n - 960 > 0 \Leftrightarrow n > 30$.

Logo, a ordem a partir da qual a soma dos primeiros termos da sucessão é superior a 960 é 30.

Questão 2 (0.5 val)

Considere a função real de variável real definida por.

$$f(x) = 2x^2 - 4$$

a) (0.25 v) Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto do seu domínio, calcule $f'(2)$.

A definição de derivada de uma função num ponto do seu domínio é dada por **um limite**, que é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Nota: se a função tiver duas expressões diferentes (dois ramos) à direita e à esquerda do ponto a do domínio, então temos de calcular as derivadas laterais, e só existe derivada se as derivadas laterais forem iguais!!

Pela definição de derivada de uma função num ponto podemos escrever:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$ (resolvendo a indeterminação)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 2(x+2) = 8$$

b) (0.25 v) Na sequência da alínea anterior, determine o valor de $f'(a)$, sendo a um ponto qualquer do domínio de f.

Pela definição de derivada de uma função num ponto do seu domínio, vem:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2x^2 - 4 - (2a^2 - 4)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2x^2 - 2a^2}{x - a} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2(x-a)(x+a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (2x + 2a) = 4a$$

Questão 3 (2 val)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 1$

a) (0.4 v) Prove, recorrendo à definição, que $f(x)$ é uma função crescente no intervalo $]0, +\infty[$.

Pretendia-se que os estudantes apresentassem a prova, usando **a definição de função crescente**. Muitos estudantes utilizaram outros métodos alternativos (derivada, gráfico), mas que não era o que se pedia nesta alínea.

Pretendemos provar, **recorrendo à definição**, que $f(x) = x^2 - 1$ é uma função crescente em $]0; +\infty[$, ou seja que:

Para quaisquer pontos $x_1, x_2 \in]0; +\infty[$ temos de verificar que, **se** $x_1 > x_2$ **então** $f(x_1) > f(x_2)$

(se o objeto x_1 é maior que o objeto x_2, então isto reflete-se da mesma forma nas imagens, sendo que a imagem de x_1 é superior à imagem de x_2, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$ **, quaisquer que sejam os pontos).**

Ora $f(x_1)=x_1^2-1$ e $f(x_2)=x_2^2-1$ e assim podemos escrever
$f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow x_1^2-1>x_2^2-1\Leftrightarrow x_1^2>x_2^2$

Como (por hipótese) x_1 e x_2 são positivos, pela monotonia da potenciação podemos escrever
$x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow x_1>x_2$.

Por hipótese, sabemos que $x_1>x_2$ é uma desigualdade verdadeira. Fica assim provado o pretendido.

b) (0.4 v) Indique os intervalos de monotonia da função e justifique que -1 é um extremo (máximo ou mínimo) da função. (Esta alínea pressupõe pesquisa sobre o estudo dos extremos de funções e seu cálculo).

Para estudar a monotonia e os extremos da função $f(x)=x^2-1$ vamos estudar o sinal e os zeros da primeira derivada da função.

$$f'(x)=2x$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$$
$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$$

Sintetizando esta informação numa tabela podemos concluir sobre a monotonia da função em estudo.

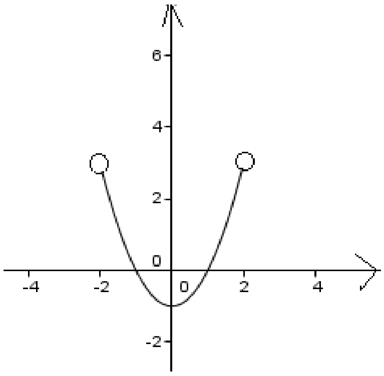
x	-∞	0	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	m.	↗

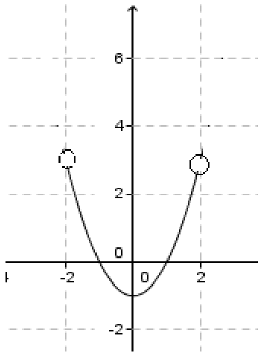
Conclusão:
f é estritamente decrescente de $]-\infty;0[$;
f é estritamente crescente de $]0;+\infty[$;
zero é a abcissa do ponto onde a primeira derivada da função se anula, além disso, muda de sinal à direita e à esquerda do referido zero, passando de negativa para positiva, logo f atinge o seu valor mínimo em
-1 (pois $f(0)=-1$).

Nota: alguns estudantes fizeram alguma confusão entre abcissas houve alguma confusão entre elementos do domínio com as respetivas imagens (eixo horizontal=abcissas, objetos) e ordenadas (eixo vertical=ordenadas, as imagens)!**Ora, a monotonia da função é descrita para valores do seu domínio!**

c) (0.3 v) Indique que figura geométrica é representada por $f(x)$ e elabore o seu gráfico no intervalo]-2, 2[.

O gráfico da função f(x) é uma parábola com a concavidade voltada para cima (pois o coeficiente do termo de maior grau é positivo) cujo vértice tem coordenadas (0; -1). O gráfico interseta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas (-1;0) e (1;0). No intervalo aberto $]-2;2[$ vem:





x	f(x)
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

d) (0.3 v) Estude a paridade da função $g(x) = xf(x)$. (ver se é par ou ímpar)

Pretendemos estudar a paridade da função resultante do produto de x por f(x), ou seja,
$g(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x$.
Ora, $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$ e $-g(x) = -(x^3 - x) = -x^3 + x$.

Como $g(-x) = -g(x)$, para qualquer x pertencente ao domínio da função, concluímos que g **é uma função ímpar.**

e) (0.6 v) Utilize os conhecimentos aplicados anteriormente na resolução do seguinte problema: a função **Receita** total de uma empresa é o montante, em dinheiro, que a empresa recebe pela venda de seus produtos e/ou serviços (não confundir com a função Lucro). Genericamente, a receita pode ser decomposta em $R(x) = xp(x)$, onde p é o preço que depende do número de unidades vendidas, x.
$\rightarrow$ Um fabricante de automóveis tem uma função de receita que tem a expressão matemática $R(x) = 5x - 3x^2$, dada em unidades monetárias, e em que x é o número de unidades vendidas. Reescreva a Receita na expressão $R(x) = xp(x)$. Calcule a derivada da Receita e interprete o seu significado no contexto económico. Indique o montante máximo de Receita que pode ser atingido pelo fabricante de automóveis (note que não é possível ter receita infinita positiva, pois há outros fatores económicos, que afetam este valor).

A receita: $R(x) = 5x - 3x^2 = x(5 - 3x)$.

$$R'(x) = [x(5-3x)]' = x'(5-3x) + x(5-3x)' = 5 - 3x - 3x = 5 - 6x$$
$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$R'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{6} \text{ e } R'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}.$$

x	0	5/6	$+\infty$
R'(x)	5 +	0	-
R(x)	0 $\nearrow$	M.	$\searrow$

No contexto do problema económico não faz sentido x assumir valores inferiores a zero nem excessivamente elevados, pois representa o número de unidades vendidas.

- A receita aumenta para $x \in]0; \frac{5}{6}[$;
- como $R(x)=0 \Leftrightarrow x(5-3x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{3}$,

podemos dizer que a receita é zero quando o número de unidades produzidas é zero ou cinco terços. Assim, em vez da receita diminuir para valores de x a tender para +∞, podemos dizer que a receita diminui para $x \in]\frac{5}{6}; \frac{5}{3}[$.

- Atinge o valor máximo para $x=\frac{5}{6}$, pois a derivada anula-se e passa de positiva para negativa.
- Dado que $R\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{12} \cong 2.083$, o montante máximo da receita é 2,083 unidades monetárias.

Questão 4 **(0.5 val)**

Considere a função real de variável real definida por $f(x)=\log(e^x-x)$ e calcule, recorrendo à 1ª e 2ª derivada de uma função e indicando o domínio em que é válida.

Nota: só é possível calcular derivada em pontos que pertencem ao domínio da função! Veja-se que é preciso saber a imagem no ponto, $f(a)$ se usarmos a definição, para calcular a derivada. É importante ter isto em atenção sempre que recorrer ao cálculo de derivadas através das regras de derivação.

a) **(0.25 v)** $f'(0)$

$f(x)=\log(e^x-x)$

$D_f=\{x \in \Re : e^x - x > 0\} = \Re$, dado que a função exponencial $(y=e^x)$ assume valores superiores à função linear $(y=x)$ para qualquer valor real.

$$f'(x)=\frac{(e^x-x)'}{e^x-x}=\frac{e^x-1}{e^x-x}.$$

O domínio da função derivada é: $D_{f'}=\{x \in \Re : e^x - x \neq 0\} = \Re$.

A derivada no ponto de abcissa zero é: $f'(0)=\frac{e^0-1}{e^0-0}=\frac{0}{1}=0$.

Notas: foram poucos os estudantes que indicaram os domínios das funções.

Alguns estudantes incluíram $\log e$ na derivada, mas recorde-se que $\log_e e = 1$ (o logaritmo de e nessa mesma base é 1, pois $e^1=e$ - então 1 é o expoente=logaritmo.

b) (0.25 v) $f''(0)$ Nota: (considere aqui $log = ln$, isto é, logaritmo na base e).

Da alínea anterior sabemos que $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

Assim,

$$f''(x)=\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]'=\frac{(e^x-1)'(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}$$

$$D_{f''}=\{x\in\Re:(e^x-x)^2\neq 0\}=\Re$$

Logo, $f''(0)=\dfrac{e^0-0-1+1}{(e^0-0)^2}=\dfrac{1}{1}=1$.

Questão 5 (0.5 val)

Indique a equação da reta que incide no ponto A(3, -1) e tem declive 2. Elabore um gráfico desta reta (parte do gráfico, já que não pode representar para todo o domínio $\mathbb{R}$). (nota: ver módulos de Geometria – 1, 2, 3).

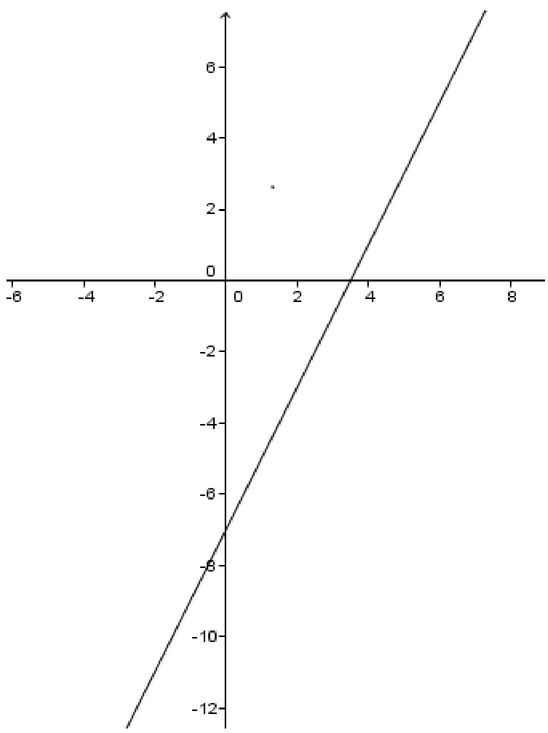
Pretendemos uma equação da reta que passa pelo ponto A (3; -1) e tem declive 2.

Sabemos que uma equação reduzida de uma reta é do tipo $f(x)=mx+b$

Onde m representa o declive e b a ordenada na origem.

Assim vem $f(x)=2x+b$. Substituindo as coordenadas do ponto A na equação obtemos o valor da ordenada na origem: $-1=2\times 3+b \Leftrightarrow b=-7$

A equação pretendida é $f(x)=2x-7$. Uma parte da representação gráfica da reta é:



x	f(x)
0	-7
3	-1