U.C. 21076

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Ano Letivo: 2015/2016

TESTE FORMATIVO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

I

a)

Para a resolução gráfica é importante a constatação e referencia de alguns fatos. Em primeiro lugar, relativamente ao número de variáveis: são duas, pelo que a abordagem gráfica bidimensional é viável.

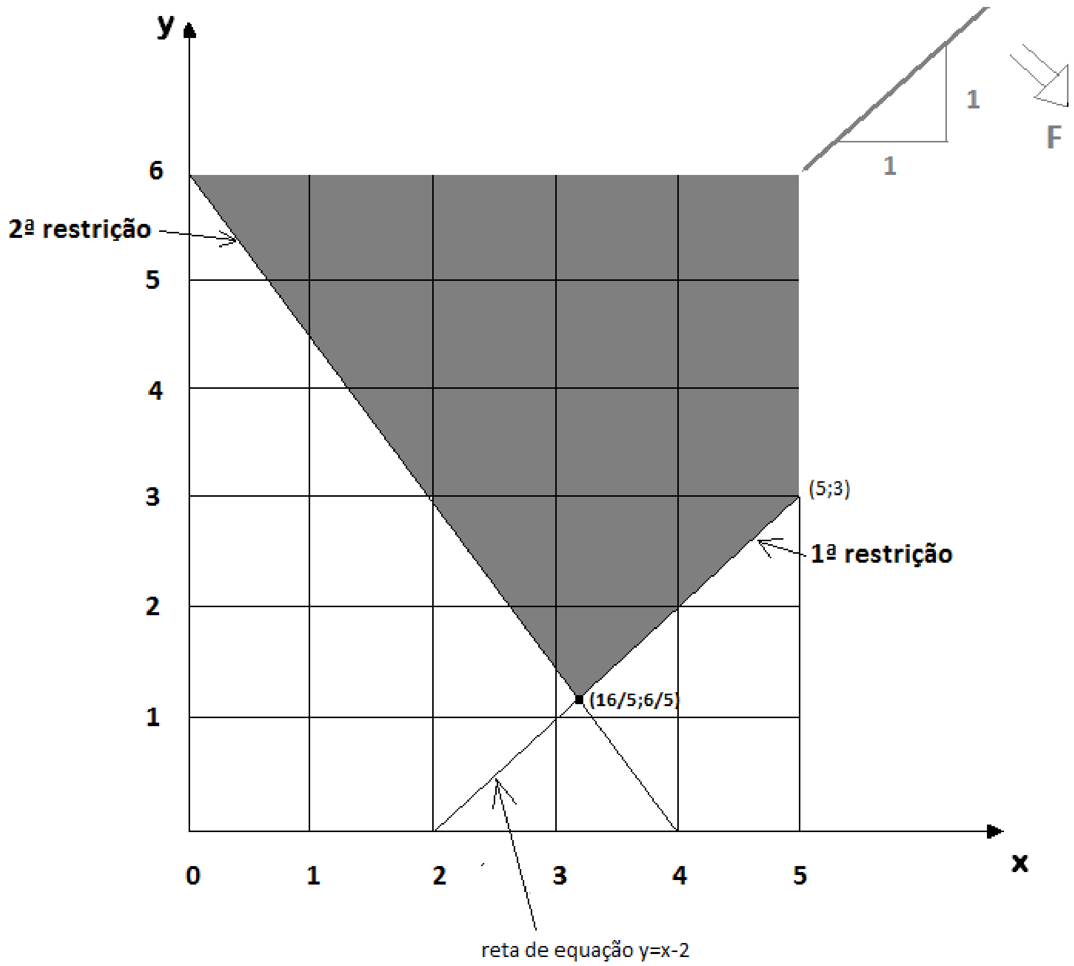
Essas variáveis respeitam a condição de não negatividade e portanto a nossa análise fica reduzida ao primeiro quadrante do referencial.

Por outro lado, cada uma das restrições corresponde a uma região do plano delimitada por uma reta.

Finalmente, verifica-se que para cada valor de F (função objetivo), corresponde a uma reta.

Portanto neste caso, $F = 2x - 2y$ representa uma familia de retas paralelas de declive 1 ($x = F/2 + y$). Ainda relativamente à função objetivo, podemos constatar que sendo para maximizar a função F e sendo o coeficiente de x positivo, então interessa incrementar o valor de x; por outro lado, sendo negativo o coeficiente de y, interessa diminuir o valor de y.

Seja então a representação gráfica do problema:



A zona sombreada representada na figura, corresponde ao conjunto de pontos que respeitam em simultâneo as duas restrições, assim como as condições de não negatividade das variáveis. Numa primeira análise, parece não não ser possível encontrar a solução ótima do problema, pois o conjunto das soluções admissíveis é ilimitado.

Face ao declive da reta associada a F, e do sentido em que esta função cresce, quando fazemos o movimiento desta reta no sentido da seta indicada na figura, encontramos a reta de equação y=x-2 e assim podemos concluir que o problema admite múltiplas soluções ótimas: por exemplo os pontos (16/5;6/5) e (5;3) são soluções ótimas do problema que pertencem ao espaço de soluções admissíveis, correspondendo ao valor de $F = 4$.

Podemos representar numa forma analítica o resultado que nos permite obter todas as soluções (x* ; y*) e que correspondem ao valor ótimo F*=4.

Essas soluções, são todas as que estão contidas na semi-reta de equação

$$y^* = x^* - 2 \quad \text{com} \quad x^* \geq 16/5$$

b) O problema na forma standard virá

$$\text{Max } F = 2x - 2y + 0\,F_1 + 0\,F_2$$

s.a:

$$x - y + 1\,F_1 + 0\,F_2 = 2$$

$$3x + 2y + 0\,F_1 - 1\,F_2 = 12$$

$$x\,,\,y\,,\,F_1\,,\,F_2 \geq 0$$

c) O espaço de soluções admissíveis é não limitado, sendo o valor de F finito. As variáveis podem asumir valores arbitrariamente grandes na solução ótima.

d)

Quadro inicial

	X	y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i
F_1	1*	-1	1	0	2	2/1=2 ←
F_2	3	2	0	-1	12	12/3=4
F	-2	2	0	0	0	

x=0 ; y=0 ; F=0

1ª iteração

	x	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i
x	1	-1	1	0	2	2/-1=-2
F_2	0	5**	-3	-1	6	6/5 ←
F	0	0	2	0	4	

x=2 ; y=0 ; F=4

2ª iteração

	x	Y	F_1	F_2	T.I.	
x	1	0	2/5	-1/5	16/5	
y	0	1	-3/5	-1/5	6/5	
F	0	0	2	0	4	

x*=16/5 ; y*=6/5 ; F*=4

e) Olhando para a última linha do último quadro constatamos que (x, y) = (16/5 , 6/5) com F= **4.** Verifica-se tratar-se de uma solução ótima, pois não existem coeficientes negativos na linha que representa a função objetivo. No entanto verifica-se também que um dos coeficientes duma variável não básica é nulo. Este resultado leva-nos a concluir que existem outras soluções básicas ótimas, claro que mantendo-se o valor ótimo F*=4. Estamos pois, perante um caso em que pela existência de um coeficiente correspondente a uma variável não básica, nulo, existe uma multiplicidade de soluções ótimas.

Esta constatação pode ser observada também através da resolução gráfica.

II

a) Como de acordo com o enunciado, os "clientes (...) chegam segundo um processo Poissoniano com taxa média de 20 chegadas por hora" e se sabe que "a duração do atendimento se pode considerar exponencialmente distribuída, com valor médio igual a 2 minutos", estamos perante um sistema de filas de espera do tipo M/M/.... Ainda de acordo com o enunciado, é o dono da tabacaria que atende os clientes sem qualquer ajuda e "devido ao espaço reduzido para o atendimento, quando se encontram 4 clientes no interior da tabacaria, potenciais clientes não chegam a entrar". Assim, estaremos perante um sistema M/M/1/K, com K = 4 (número máximo de clientes no sistema).

Do enunciado retiramos que λ = 20 hora $^{-1}$ = 20/60 min^{-1} = 1/3 min^{-1} e μ = 1/2 min^{-1}. Assim, poderemos calcular a **taxa de pressão $\rho = \lambda / \mu$** = 2/3 e, a partir deste valor, poderemos determinar a probabilidade de não haver qualquer cliente na “Tabacaria do Bairro”:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \mathbf{38{,}39\%}.$$

b) Calcularemos agora a probabilidade de haver quatro clientes na “Tabacaria do Bairro”:

$$\boldsymbol{P_4} = \rho^4 P_0 = \mathbf{7{,}58\%}.$$

c) Determinação do número médio de clientes no interior da “Tabacaria do Bairro”:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \mathbf{1{,}24\ clientes}.$$

d) Determinação da taxa de ocupação do dono da “Tabacaria do Bairro”, com o atendimento dos clientes:

Comecemos por calcular a taxa média efetiva de entradas no sistema , recordando-nos que há potenciais clientes que desistem de entrar na tabacaria, por esta se encontrar cheia: $\bar{\lambda} = \lambda\ (1 - P_4) = (1/3)\ .\ (1 - 0{,}0758) = 0{,}3081\ \text{min}^{-1}$. O valor obtido, como se esperaria, é inferior à taxa média de chegadas de potenciais clientes $\lambda = 1/3 = 0{,}3333$!

Podemos, agora, calcular a **taxa de ocupação** $= \bar{\lambda}/\mu =$ **0,6162**.

e) A diferença entre a taxa de chegada de potenciais clientes e a taxa efectiva de entrada de clientes dá-nos a taxa média de clientes perdidos, devido à exiguidade da tabacaria.

Assim, $\lambda - \bar{\lambda} = 0{,}0252\ \text{min}^{-1} = 1{,}512\ \text{hora}^{-1} = 15{,}12\ \text{dia}^{-1} = 362{,}88\ \text{mês}^{-1}$. Ou seja, por mês, há em média 362,88 potenciais clientes que desistem de entrar na “Tabacaria do Bairro”, devido à sua exiguidade. A correspondente receita média perdida por mês é igual a 362,88 . 3,00 = **1088,64 €**.

FIM