Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
D)	D)	D)

4. A resolução sugerida pelo estudante obriga a que os quatro algarismos surjam nas primeiras quatro posições. Esta proposta não contempla assim todos os casos que estão dentro das condições do enunciado da pergunta, como, por exemplo, os números 11111234, 22322413, ou 32433214.

Para encontrar o número correto utilize-se o princípio da inclusão/exclusão, para o que definimos os seguintes conjuntos:

$$X = \{\text{números de 8 dígitos só com os algarismos 1, 2, 3, 4}\}$$
$$A_i = \{x \in X : \text{o algarismo } i \text{ não aparece em } x\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Pretende-se determinar

$$\#(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)) = \#X - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4),$$

em que pelo referido princípio $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ é igual a

$$\sum_{i=1}^{4} \#A_i - \sum_{1\leq i<j\leq 4} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq 4} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Como qualquer algarismo 1, 2, 3, 4 pode aparecer em qualquer uma das 8 posições, tem-se $\#X = 4^8$. De modo semelhante,

$$\#A_i = 3^8, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

No caso dos conjuntos $A_i \cap A_j$, $1 \leq i < j \leq 4$, os elementos de qualquer um destes conjuntos são números de 8 dígitos formados só por 2 algarismos, pelo que

$$\#(A_i \cap A_j) = 2^8, \quad 1 \leq i < j \leq 4.$$

Os conjuntos $A_i \cap A_j \cap A_k$, $1 \leq i < j < k \leq 4$ têm apenas 1 elemento (um número de 8 dígitos, com os dígitos todos iguais a um mesmo valor) e o conjunto $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ é vazio (porque nenhum dos algarismos 1, 2, 3, ou 4 pode aparecer). Assim,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4} \#A_i}_{=4\cdot 3^8} - \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq 4} \#(A_i \cap A_j)}_{=\binom{4}{2}\cdot 2^8} + \underbrace{\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)}_{=\binom{4}{3}\cdot 1}$$
$$- \underbrace{\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}_{=0},$$

pelo que

$$\begin{aligned}\#(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)) &= 4^8 - \left[4 \cdot 3^8 - \binom{4}{2} \cdot 2^8 + \binom{4}{3}\right] \\ &= 4^8 - \left[4 \cdot 3^8 - 6 \cdot 2^8 + 4\right].\end{aligned}$$

5.1. Caso base: $n = 1$.

Como $\binom{1}{2} = 0$, tem-se

$$\binom{2}{2} + \binom{1}{2} = 1 = 1^2,$$

o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Escolhido e fixado um $1 \leq n \in \mathbb{N}$ arbitrário, suponhamos que

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2.$$

Tese de indução:

$$\binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} = (n+1)^2.$$

(Aqui, o n é o mesmo que se fixou na hipótese de indução.)

Passo de indução: Pela Lei de Pascal,

$$\binom{n+2}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{1}, \quad \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1},$$

donde

$$\binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1}.$$

Pela hipótese de indução resulta então que

$$\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2} = n^2+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{1} = n^2+(n+1)+n = (n+1)^2.$$

Pelo princípio da indução matemática conclui-se que a igualdade do enunciado é válida para todo o $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

5.2. Tem-se $(k+n)(k-n) = k^2 - n^2$, donde

$$\sum_{k=0}^{n}(k+n)(k-n) = \sum_{k=0}^{n}(k^2-n^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 - n^2(n+1),$$

em que, pela alínea anterior,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}. \tag{1}$$

Sobre cada uma das somas no lado direito da igualdade (1):

- A mudança de variável $k+1 \rightsquigarrow m$ seguida da aplicação da fórmula da adição do índice superior conduz a

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2} = \sum_{m=2}^{n+1}\binom{m}{2} = \binom{n+2}{3};$$

- Por $\binom{1}{2} = 0$ e por nova aplicação da fórmula da adição do índice superior,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Como resultado,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+n)(k-n) = \sum_{k=0}^{n} k^2-n^2(n+1) = \binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}-n^2(n+1).$$

6.1. Uma função bijetiva $f : [n] \to [n]$ é, em particular, uma função injetiva, o significa que os valores $f(1), f(2), \cdots, f(n) \in [n]$ são todos distintos entre si. Assim:

- Para o valor de $f(1) \in [n]$ podemos escolher qualquer elemento do conjunto $[n]$, num total de $n = \#[n]$ possibilidades;
- Fixado o valor para $f(1)$, o valor de $f(2)$ tem de ser diferente de $f(1)$, pelo que existem $n-1 = \#([n] \setminus \{f(1)\})$ diferentes maneiras para fixar o valor de $f(2) \in [n] \setminus \{f(1)\}$;
- Escolhidos $f(1)$ e $f(2)$, o valor de $f(3)$ tem então de ser escolhido entre os elementos do conjunto $[n] \setminus \{f(1), f(2)\}$, num total de $n - 2 = \#([n] \setminus \{f(1), f(2)\})$ possibilidades;
- Repetindo este raciocínio, no final, sobra apenas uma possibilidade para o valor de $f(n)$: o único elemento do conjunto $[n] \setminus \{f(1), f(2), \cdots, f(n-1)\}$.

No total, existem assim $n!$ diferentes funções bijetivas $f : [n] \to [n]$.

Outra maneira: Pelo corolário da pág. 34 do manual e pela entrada nº 5 da Tabela dos 12 Caminhos:

$$\#\{f : [n] \to [n] \text{ bijetivas}\} = \#\{f : [n] \to [n] \text{ injetivas}\} = n^{\underline{n}} = n!$$

6.2. Dada uma função $f : X \to Y$, a função sobrejetiva $F : X \to f(X)$ definida tal como no enunciado é única. Assim e para $X = [n]$ e $Y = [m]$,

$$\#\{F : [n] \to f([n]) = [m] \text{ bijetivas}\} = \#\{f : [n] \to [m] \text{ injetivas}\}.$$

Pelo teorema da pág. 33 do manual tem-se

$$\{f : [n] \to [m] \text{ injetivas}\} = \emptyset \text{ para } m < n,$$

pelo que, por nova aplicação da entrada nº 5 da Tabela dos 12 Caminhos,

$$\#\{f : [n] \to [m] \text{ injetivas}\} = \begin{cases} 0, \text{ se } m < n \\ m^{\underline{n}} = \dfrac{m!}{(m-n)!}, \text{ se } m \geq n \end{cases}.$$